Вестник Брянского государственного университета. № 4 (2009): Математика. Физика. Биология. Химия. Брянск: РИО БГУ, 2009.181с.

В этом выпуске Вестника Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского представлены материалы по основным направлениям исследований ученых университета в области математики, физики, биологии, химии.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

Ответственность за точность фактологического материала, используемого в статьях, несут авторы.

ISSN 2072-2087

ВЕСТНИК Брянского государственного университета

Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta

The Bryansk State University Herald

4

2009

ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

EXACT AND NATURAL SCIENCES

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

CONTENTS

PHYSICS, MATHEMATICS

NATURAL SCIENCES

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

УДК 517.44

ДВУХВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА-БЕССЕЛЯ

С.К. Абдуллаев, А.А. Акперов, М.К. Керимов

В работе в терминах интегральных характеристик типа Ω_p и Ω_p^* локально интегрируемых в p-ой степени функций устанавливаются некоторые оценки для интегральных операторов типа свертки, ассоциированных с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, в частности, для сингулярных интегральных операторов, потенциалов Рисса и Бесселя, когда оператор обобщенного сдвига берется по произвольному набору переменных. На базе этих оценок строится двухвесовая L_p-оценка для рассматриваемых операторов.

Ключевые слова: *обобщенный сдвиг, сублинейный оператор, максимальная функция, потенциал Рисса, весовая функция*

1. Введение

Пусть R_n-эвклидово пространство размерности $n(n\geq 1)$, k,m-натуральные числа

$$R^+_{m+k,k}=\{x=(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+k}):x_{m+1}>0,\ x_{m+2}>0,\ldots,x_{m+r}>0\},$$

$$T^s u\,(x)=c_n\int_0^p\ldots\int_0^p u\Big(\,x'-s',\,(x_{m+1},s_{m+1})a_{m+1},\ldots,(x_{m+k},s_{m+k})a_{m+k}\times\prod_{i=m+1}^{m+k}\sin^{n_i-1}a_i\,da_i$$

-оператор обобщенного сдвига (ООС), порожденный дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя ([1]):

$$\Delta_B(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=m+1}^{m+k}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{n_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right],$$

где $x=(x',x_{m+1},\ldots,x_{m+k})$, $s=(s',s_{m+1},\ldots,s_{m+k})$, $x',s'\in R_m$, $n_{m+1}>0,\ldots,n_{m+k}>0$, c_n -постоянная такая, что $T^s1=1$, $n=(n_{m+1},\ldots,n_{m+k})$, $|n|=n_{m+1}+\ldots+n_{m+k}$, $(x_i,s_i)a_i=\sqrt{x_i^2-2x_is_i\cos a_i+s_i^2}$.

Пусть $1\leq p<\infty$, $d\,m(x)=\prod_{i=1}^{m+k}d\,m_i(x)$, $d\,m_i(x)=\begin{cases}d\,x_i, & i=1,2,\ldots m\ ,\\ x_i^{n_i}\,d\,x_i, & i=m+1,\ldots,m+k,\end{cases}$

и $w(t)$, $t>0$, измеримая почти всюду положительная функция.

Положим

$$L_{p,n}(w)\equiv L_{p,n}(w,R^+_{m+k,\,k})\overset{df}{=}\left\{u-\text{изм.}\ \|u:L_{p,n}(w)\|\overset{def}{=}\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|u(x)|^p\ dm(x)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\},\ L_{p,n}(1)\equiv L_{p,n}\,.$$

Пусть $1<p\leq q<\infty$. Через $K_n(p,q)$ обозначим семейство интегральных операторов типа свертки

$$A\colon u\to Au\equiv(Au)\,(x)\overset{def}{=}\int_{R^+_{m+k,k}}K(s)T^su(x)dm(s)\qquad(1)$$

где $\left|K(s)\right| \le c_k |s|^{-(m+k+|n|-a)}$, $s \ne 0$, $a = (m+k+|n|)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, ограниченно действующих из $L_{p,n}$ в $L_{q,n}$. В случае, когда $p=q$ операторы $A \in K(p,p)$ могут быть и сингулярными, тогда интеграл (1) понимается в смысле главного значения.

Классы $K_n(p,q)$ в случае обычного сдвига впервые введены в [2].

Весовые оценки для операторов типа свертки порожденных обобщенным сдвигом, ассоциированным с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, впервые рассмотрены в работе [3] в случае $k=1$.

В работе [4], [5] установлены двухвесовые оценки для операторов классов $K_n(p,q)$.

2. Основные результаты

Пусть $1<p\le q<\infty$. По определению сублинейный оператор A принадлежит классу $\overline{K}_n(p,q)$, если $A: L_{p,n} \to L_{q,n}$ ограничен и для любой функции $u \in L_{1,n}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ с компактным носителем при $x \notin \operatorname{supp} u$

$$\left|Au(x)\right| \le c \int_{R^+_{m+k,k}} |s|^{\beta} T^s |u(x)| d\mu(s),$$

где $b = -(m+k+|n|-a)$.

Рассмотрим $B_{m+k,\nu}$ - интеграл Пуассона

$$(U_\nu f)(x,t) = a_\nu \int_{R^+_{m+k,k}} t\left(t^2+|y|^2\right)^{-\frac{m+k+1+|\nu|}{2}} f(y) d\mu(y), \quad (U_\nu f)(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{t>0} (U_\nu f)(x,t),$$

$B_{m+k,n}$ - максимальную функцию

$$M_B f(x) = \sup_{e>0} \left|B(0,e)\right|_n^{-1} \int_{B(0,e)} T^y |f(x)|\, dm(y), \quad B(0,e) = \left\{y \in R^+_{m+k}; |y|<e\right\},$$

$$|E|_n = \int_E dm(y), \quad E \subset R^+_{m+k,k},$$

$B_{m+k,n}$ - дробную максимальную функцию

$$M^a_{B_{m+k,n}} f(x) = \sup_{e>0} \left|B(0,e)\right|_n^{\frac{a}{m+k+|n|}-1} \int_{B(0,e)} T^y |f(x)|\, dm(y),$$

$B_{m+k,n}$ - потенциал Рисса

$$I^a_{B_{m+k,n}} f(x) = \int_{R^+_{m+k,k}} T^y |x|^{a-(m+k)-|n|} f(y)\, dm(y).$$

Имеют место соотношения

$$U_n f, M_B f \subset \overline{K}_n(p,p) \quad (p>1),$$

$$M^a_{B_{m+k,n}} f,\ I^a_{B_{m+k,n}} f \in \overline{K}_n(p,q),\ 1<p<q<\infty,\ a = (m+k+|n|)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right).$$

В дальнейшем c-постоянная, точное значение, которой нам безразлично, $a_i = 0$ если $i \in \{1,\dots,m\}$, $a_i = n_i$ если $i \in \{m+1,\dots,m+k\}$, $b_i = |n| - a_i$.

Основные результаты нашей работы сформулированы в следующих трех теоремах.

Теорема 1 . Пусть $1<p\le q<\infty$, $i\in\{1,\dots,m+k\}$, $A \in \overline{K}_n(p,q)$. Если

а) w и w_1 - положительные монотонно возрастающие функции, удовлетворяющие условию

$$c=\sup_{t>0}\left(\int_t^{\infty}\left[x^{-\frac{a_i+1}{p'}}w_1(x)\right]^q\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t\left[x^{-\frac{a_i+1}{p'}}w(x)\right]^{-p'}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p'}}<+\infty, \tag{2}$$

либо

б) w и w_1 - монотонно убывающие функции, удовлетворяющие условию

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t\left(w_1(x)x^{\frac{a_i+1}{q}}\right)^q\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^{\infty}\left(w(x)x^{\frac{a_i+1}{p'}}\right)^{-p'}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty, \tag{3}$$

тогда для функции $u\in L_{p,n}\left(w(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$ существует $Au(x)$ для почти всех $x\in R^+_{m+k,k}$ и имеет место неравенство

$$\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|(Au)(x)w_1(|x_i|)|^q\,d\,m(x)\right)^{\frac{1}{q}}\le c\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|u(x)w(|x_i|)|^p\,d\,m(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

где постоянная c не зависит от u.

Обозначим через $w^n_{p,q,i}$ совокупность пар (w,w_1) положительных функций, удовлетворяющих условиям (2) и (3).

Теорема 2. Пусть $1<p\le q<\infty$, $i\in\{1,...,m+k\}$, $A\in\overline{K}_n(p,q)$ и $w(t)$, $w_1(t)$ - положительные монотонные функции на $(0,\infty)$. Если $(w,w_1)\in w^n_{p,q,i}$, то для функции $u\in L_{p,n}\left(w(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$ существует $Au(x)$ для почти всех $x\in R^+_{m+k,k}$ и имеет место неравенство (4).

Теорема 3 (основная). Пусть $A\in K_n(p,q)$ $1<p\le q<\infty$, $w(t)$ и $w_1(t)$ - положительные функции на $(0,\infty)$. Если

1) w, w_1 удовлетворяют условию

$$\sup_{t\le t\le 8t} w_1(t)\le c\inf_{t\le t\le 8t} w(t),\ t>0; \tag{5}$$

2) $(w,w_1)\in w^n_{p,q,i}$, то для функции $u\in L_{p,n}\left(w(|x_i|), R^+_{m+k,k}\right)$ существует $Au(x)$ для почти всех $x\in R^+_{m+k,k}$ и имеет место неравенство (4).

2. Доказательство теорем 1-3.

Обозначим через $A_{p,n}(x_i)$ $\left(A^*_{p,n}(x_i)\right)$, $i=\overline{1,m+k}$ – совокупность измеримых функций, суммируемых в p -ой степени с весом $x^{2n_{m+1}}_{m+1}...x^{2n_{m+k}}_{m+k}$ на множестве $\{x\in R^+_{m+k,k}:|x_i|\ge x\}$ $\left(\{x\in R^+_{m+k,k}:|x_i|\le x\}\right)$ при любом $x>0$.

Для каждого $i=1,2,...,m+k$ разобьем $R^+_{m+k,k}$ на прямую сумму пространств $R_{m+k-1,i}$ и $R_{1,i}$, где

$$R_{1,i}=\begin{cases}(-\infty,+\infty), & i\in\{1,2,...,m\};\\ (0,+\infty), & i\in\{m+1,...,m+k\},\end{cases}$$

а $R_{m+k-1,i}$ ортогональное дополнение $R_{1,i}$ в $R^+_{m+k,k}$. Точки пространств $R_{m+k-1,i}$ и $R_{1,i}$ обозначим, соответственно, через $\hat{y}_i$ и y_i, так что $y=\uparrow\left(\hat{y}_i, y_i\right)$. При этом будем пользоваться также обозначениями $u(y_1,...,y_{m+k})=u\left(\hat{y}_i, y_i\right)$.

Всюду в дальнейшем $c_E(t)$–характеристическая функция множества $E \subset (-\infty,+\infty)$. Положим

$$u_{x,i}(y) = c_{[0,x]}(|y_i|)|u(y)|,\ u^*_{x,i}(y) = c_{[x,\infty]}(|y_i|)|u(y)|,$$

$$u^{\mathbf{0}}_{x,i}(y_i) = \left(\int\limits_{R_{m+k-1,i}} u^p_{x,i}\left(\hat{y}_i, y_i\right) d\,m\left(\hat{y}_i\right) \right)^{\frac{1}{p}},\ \overset{\mathbf{0}}{u}{}^*_{x,i}(y_i) = \left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}} u^{*\,p}_{x,i}\left(\hat{y}_i, y_i\right) d\,m\left(\hat{y}_i\right) \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$I_{b,i}(u,x)(x) = \int\limits_{R^+_{m+k,k}} \frac{u_{x,i}(y)d\,m(y)}{\left(\left|\hat{x}_i - \hat{y}_i\right| + |x_i| + x\right)^b},\ I^*_{b,i}(u,x)(x) = \int\limits_{R^+_{m+k,k}} \frac{u^*_{x,i}(y)dm(y)}{\left[\left|\hat{x}_i - \hat{y}_i\right| + |y_i| + x\right]^b},$$

где $x \in R^+_{m+k,k}, x > 0$.

Лемма 1. Пусть

$$1 < p \le q < \infty, \quad b\,p' > m+k-1, \quad p' = p/(p-1),\ i \in \{1,\ldots,m+k\}. \tag{6}$$

Тогда для любой функции $u \in A_{p,n}(x_i)$ справедлива оценка,

$$\left\| I_{b,i}(u,x) : L_{q,n}\left(R^+_{m+k,k}\right)\right\| \le c x^{-\frac{1+a_i}{p'}} \int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\le x\}} u^{\mathbf{0}}_{x,i}(y_i)d\,m(y_i),\ x > 0,$$

постоянная c не зависит от u.

Доказательство. Применяя теорему Фубини и затем неравенство Минковского, с учетом оценки

$$\left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}} \left(\int\limits_{R_{m+k-1,i}} \left(\left|\hat{x}_i - \hat{y}_i\right| + |x_i| + x\right)^{-b} u_{x,i}\left(\hat{y}_i, y_i\right) dm\left(\hat{y}_i\right)\right)^q dm\left(\hat{x}_i\right) \right]^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(|x_i| + x\right)^{\frac{m+k-1+b_i}{r} - b} \left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}} \left(u_{x,i}\left(\hat{y}_i, y_i\right)\right)^p d\,m\left(\hat{y}_i\right) \right]^{\frac{1}{p}},$$

получим

$$K \overset{def}{=} \left\| I_{b,i}(u,x) : L_{q,n}\left(R^+_{m+k,k}\right)\right\| =$$

$$= \left(\int\limits_{R_{1,i}} d\,m(x_i) \int\limits_{R_{m+k-1,i}} d\,m\left(\hat{x}_i\right) \left(\int\limits_{R_{1,i}} d\,m(y_i) \int\limits_{R_{m+k-1,i}} \frac{u_{x,i}\left(\hat{y}_i, y_i\right) d\,m\left(\hat{y}_i\right)}{\left(\left|\hat{x}_i - \hat{y}_i\right| + |x_i| + x\right)^b} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c \left(\int\limits_{R_{1,i}} \left(|x_i| + x\right)^{-(1+a_i)\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\right)q} d\,m(x_i) \right)^{\frac{1}{q}} \int\limits_{R_{1,i}} u^{\mathbf{0}}_{x,i}(y_i)d\,m(y_i) \le$$

$$\le c x^{-\frac{1+a_i}{p'}} \int\limits_{R_{1,i}} u^{\mathbf{0}}_{x,i}(y_i)d\,m(y_i).$$

Здесь учтено, что $r>1$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}$, $\frac{m+k-1+b_i}{r}-b=-(1+a_i)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)<0$.

Аналогично доказывается

Лемма 2. Пусть выполняются условия (6). Тогда для любой функции $u\in A_{p,n}(x_i)$ справедлива оценка

$$\left\|I^*_{b,i}(u,x):L_{q,n}\left(R^+_{m+k,k}\right)\right\|\le cx^{\frac{a_i+1}{q}}\int\limits_{R_{1,i}}\left(|y_i|+x\right)^{\frac{m+k-1+b_i}{r}-b}\overset{0}{u}{}^*_{x,i}(y_i)dm(y_i),\ x>0,$$

постоянная c не зависит от u.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай а). Пусть $u\in L_{p,n}\left(w,R^+_{m+k,k}\right)$. Зафиксируем $x>0$ и представим функцию $u(y)$ в виде суммы $u=u_1+u_2$, где $u_1(y)=c_{[0,x/2]}(|y_i|)u(y)$, $u_2(y)=u(y)-u_1(y)$ ($\Rightarrow u_2(x)=c_{[x/2,\infty)}(|x_i|)u(x)$). Тогда $u_2\in L_{p,n}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ и $Au_2(x)$ существует почти для всех $x\in R^+_{m+k,k}$. Теперь докажем, что $Au_1(x)$ сходится абсолютно для всех $x\in\left\{R^+_{m+k,k}:|x_i|>x\right\}$.

Отметим, что если $b>0$, то $\overset{y}{T}\left(|x|^{-b}\right)\le c\,|x-y|^{-b}$, и, кроме того, если $x\in\left\{R^+_{m+k,k}:|x_i|>x\right\}$ и $|y_i|\le x/2$, то $|x_i-y_i|\ge|x_i|-|y_i|\ge c\left(|x_i|+x\right)$, и потому

$$c\left(\left|\hat{x}-\hat{y}\right|+|x_i|+x\right)^{-b}\le|x-y|^{-b}\le c_1\left(\left|\hat{x}-\hat{y}\right|+|x_i|+x\right)^{-b}.$$

Учитывая это и самосопряженность оператора T^s, получим

$$|Au_1(x)|\le\int\limits_{R^+_{m+k,k}}\left|\overset{y}{T}|x|^{-b}\right||u_1(y)|dm(y)\le c\left\|u:L_{p,n}\left(w(|y_i|)\right),R^+_{m+k,k}\right\|\times$$

$$\times\left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}}\frac{dm\left(\hat{y}_i\right)}{\left[\left|\hat{x}_i-\hat{y}_i\right|+|x_i|+x\right]^{bp'}}\right]^{\frac{1}{p}}\times\left(\int\limits_{R_{1,i}}w\left(|y_i|\right)^{-p'}dm(y_i)\right)^{\frac{1}{p'}}<+\infty.$$

Оценим $\left\|Au:L_{q,n}\left(w(|x_i|)\right),R^+_{m+k,k}\right\|$. Пусть w_1' –произвольная непрерывная возрастающая функция на $(0,+\infty)$, такая, что $w_1'(t)\le w_1(t)$, $w_1'(0)\le w_1(0+0)$ и $\exists y_1(t)$: $w_1'^q(t)=\left(\int\limits_0^t y^q(t)dt\right)+w_1'^q(0)$, $t\in(0,\infty)$.

Прежде всего отметим, что из (2) вытекает справедливость следующих двух соотношений:

1) $w_1(t)\le cw\left(\frac{t}{2}\right)$, $t>0$,

2) $\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty\left[x^{-\frac{a_i+1}{p'}}y_1(x)\right]^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^t\left[x^{-\frac{a_i+1}{p'}}w(x)\right]^{-p'}\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p'}}=c<+\infty$.

Учитывая последние соотношения, имеем

$$\left\| Au : L_{q,n}\left(w_1'; R^+_{m+k,k}\right)\right\| \le \left[\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |Au|^q \int\limits_0^{|x_i|} y_1^q(t)\,dt\,dm(x)\right]^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ w_1'^q(0)\left[\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |Au|^q\,dm(x)\right]^{\frac{1}{q}} = l_1 + l_2 .$$

Далее учитывая равенство

$$\int\limits_0^{|x_i|} y_1^q(t)\,dt = \int\limits_0^{\infty} c_{[0,|x_i|]}(t)\,y_1^q(t)\,dt ,$$

получим

$$l_1 = \left(\int\limits_0^{\infty} y_1^q(t) \int\limits_{\{R^+_{m+k,k}:|x_i|\ge t\}} |Au(x)|^q\,dm(x)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \le l_1(1) + l_1(2),$$

где

$$l_1(1) = \left(\int\limits_0^{\infty} y_1^q(t) \int\limits_{\{R^+_{m+k,k}:|x_i|\ge t\}} \left|A\left(c_{[t/2,\infty]}(u)\right)(x)\right|^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}} .$$

$$l_1(2) = \left(\int\limits_0^{\infty} y_1^q(t) \int\limits_{\{R^+_{m+k,k}:|x_i|\ge t\}} \left|A\left(c_{[0,t/2]}(u)\right)(x)\right|^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}} .$$

В силу $A \in \overline{K}_n(p,q)$ и 1) имеем

$$l_1(1) \le c_A \left[\int\limits_{R^+_{m+k,k}} \left(\int\limits_0^{2|x_i|} y_1^q(t)\,dt\right) |u(x)|^p\,dm(x)\right]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c_A\left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |u(x)|^p\, w_1(2|x_i|)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{p}} \le c_A\left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |u(x)|^p\, w^p(|x_i|)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Оценим $l_1(2)$. Очевидно, что $\left|A\left(c_{[0,|x_i|]}(u)\right)(x)\right| \le c\, I_{b,i}\left(u,\frac{t}{2}\right)(x)$ при $x \in \left\{R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge t\right\}$.

Положим

$$A_{t,i}(t) = g_i\, u^0_{t,i}(-t) + u^0_{t,i}(t), \qquad g_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \; i \in \{1,2,\dots,m\}, \\ 0, & \text{если } \; i \in \{m+1,\dots,m+k\}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\le t\}} u^0_{t,i}(y_i)\,dm(y_i) = \int\limits_0^{x} A_{t,i}(t)\,t^{a_i}\,dt .$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получим

$$l_2(2) \le \left(\int\limits_0^{\infty} y_1^q(t)\,t^{-\frac{a_i+1}{p'}\cdot q}\left(\int\limits_{\{R^+_{m+k,k}:|y_i|\le t\}} u^0_{t,i}(y_i)\,dm(y_i)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le\left(\int_0^\infty\left[y_1^q(t)t^{-\frac{a_i+1}{p'}}\int_0^t t^{a_i}A_{t,i}(t)dt\right]^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положим $n(t)=y_1(t)t^{-\frac{a_i+1}{p'}}$, $g(t)=t^{-\frac{a_i}{p'}}w(t)$. Тогда в силу 2) выполняется условие

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty|n(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t|g(t)|^{-p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}}<+\infty,$$

поэтому в силу теоремы Харди [5]

$$\left(\int_0^\infty\left|n(t)\int_0^t g(t)dt\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\le c\left(\int_0^\infty|g(t)g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая теперь $g(t)=t^{a_i}A_{t,i}(t)$, получим

$$l_1(2)\le c\left(\int_0^\infty\left[t^{-\frac{a_i}{p'}}w(t)t^{a_i}A_{t,i}(t)\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

И, наконец, имеем

$$l_1(2)\le c\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|u(y)|^p w^p(|x_i|)dm(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогично, с учетом условий $A\in\overline{K}_n(p,q)$ и $w_1'(0)\le w_1(0)$, получим

$$l_2\le cc_A\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|u(x)|^p w^p(|x_i|)dm(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, теорема 1 доказана в случае условия а). Случай б) рассматривается аналогично.

Теорема 2 доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 3. Пусть $u\in L_{p,n}\left(w(|x_i|),R^+_{m+k,k}\right)$. Положим

$$C_{i,n}=\left\{R^+_{m+k,k}:2^n<|x_i|\le 2^{n+1}\right\},\quad n=1,2,\ldots.$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\left(\int_{R^+_{m+k,k}}|Au(x)w_1(|x_i|)|^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\left(\sum_{n\in Z}\int_{C_{i,n}}\left|A\left(u(y)c_{[0,2^{n-1}]}(|y_i|)\right)(x)w_1(|x_i|)\right|^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\sum_{n\in Z}\int_{C_{i,n}}\left|A\left(u(y)c_{[2^{n-1},2^{n+2}]}(|y_i|)\right)(x)\,w_1(|x_i|)\right|^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\sum_{n\in Z}\int_{C_{i,n}}\left|A\left(u(y)\,c_{[2^{n+2},\infty]}(|y_i|)\right)(x)\;w_1(|x_i|)\right|^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}=a_1+a_2+a_3$$

Положим

$$u_{i,n}(y)=u(y)\,c_{[0,2^{n-1}]}(|y_i|).$$

Оценим сверху a_1. Пользуясь рассуждениями, проведенными при доказательстве леммы 1, получаем

$$a_1\le\left(\sum_{n\in Z}\int_{C_{i,n}}w_1^q(|x_i|)\left(\int_{\{y\in R^+_{m+k,k}:|y_i|\le 2^{n-1}\}}\frac{u_{i,n}(y)\,dm(y)}{\left[\left|\hat{x}_i-\hat{y}_i\right|+|x_i|\right]^b}\right)^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\left(\sum_{n\in Z}\int_{\{R_{1,i}:2^n<|x_i|<2^{n+1}\}}w_1^q(|x_i|)\left[\int_{R_{1,i}:|y_i|\le 2^{n-1}}|x_i|^{\frac{m+k-1+b_i}{r}-b}u^*_{i,n}(y_i)dm(y_i)\right]^q dm(x_i)\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le c\left(\int_{R^+_{m+k,k}}\left(|u(x)|w(|x_i|)\right)^p dm(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что последняя оценка имеет место и для a_3.

И наконец, оценим a_2.

Так как $C_{i,n}\subset\left\{R^+_{m+k,k}:2^{n-1}<|x_i|\le 2^{n+1}\right\}=C'_{i,n}$, то в силу $A\in\overline{K}_n(p,q)$ и условия (5), имеем

$$a_2\le\left(\sum_{n\in Z}\left(\sup_{x\in C'_{i,n}}w_1(|x_i|)\right)^q\int_{C'_{i,n}}\left|A\left(u(y)\,c_{C_{i,n}}(|y_i|)\right)(x)\right|^q dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le c_A\cdot c\left(\sum_{n\in Z}\left(\inf_{x\in C'_{i,n}}w_1(|x_i|)\right)^q\left(\int_{C'_{i,n}}|u(x)|^p dm(x)\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$\le c_A\cdot c\left(\int_{R^+_{m+k,k}}\left|u(x)\,w(|x_i|)\right|^p dm(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3 доказана.

The double weighted estimates for the sublinear operators of the wide class including particularly, singular integral operators, Riesz and Bessel potentials, maximal functions, fractional maximal functions, Poisson integrals associated with Laplace-Bessel differential operator, are obtained.

The key words: *generalized shift, sublinear operator, maximal function, Riesz potential, weight function*

Список литературы:

1. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // Успехи матем. Наук. 6. №2 (1951). С .102-143.
2. Абдуллаев С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах

суммируемых функций. ДАН СССР. 1985 Т.283. № 4. С.777-780.

3. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. Весовые оценки сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига. Математический сборник. 1992. Т.183. № 9. С.45-66.

4. Абдуллаев С.К., Карамалиев Н.Р. Весовые оценки сингулярных, слабо сингулярных интегралов, максимальных и дробных максимальных функций, ассоциированных с обобщенным сдвигом. Тезисы IV Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения». Ростов-на-Дону. 28 мая-3 июня 2006. С.44-52.

5. Акперов А.А. Весовые оценки сингулярных и слабо сингулярных интегралов, порожденных обобщенным сдвигом. Вестник Бакинского государственного университета, серия физико-математических наук. 2008 . № 3. С.65-75.

Об авторах

С.К. Абдуллаев – проф., докт., государственный университет Баку, sadig.abdullaev@mail.ru

А.А. Акперов – государственный университет Баку, sadig.abdullaev@mail.ru

М.К. Керимов – государственный университет Баку, sadig.abdullaev@mail.ru

УДК 62Т.134

КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШАРОВОЙ МОЛНИИ

А.П. Будехин

В статье представлена модель шаровой молнии как нейтральное образование круговых токов, движущихся на встречу друг другу электронов и положительно заряженных ионов в создаваемом ими же самими эффективном магнитном поле, взаимодействие с которым удерживает частицы на орбитах.

Ключевые слова: *шаровая молния, потоки круга, электроны, ионы, магнитное поле.*

Шаровую молнию можно описать как устойчивый объект, состоящий из положительно заряженных ионов и электронов, с помощью аппарата квантовой механики. Причем, в физическом смысле данная модель коренным образом отличается от модели атома, где устойчивость достигается путем движения по орбитам вокруг положительного протона электронов. В модели шаровой молнии предполагается следующая картина: При прохождении электрического разряда в атмосфере, то есть мощного электрического тока, вблизи траектории возникает огромное по величине магнитное поле. Находящиеся в области магнитного поля электроны и положительные ионы начинают двигаться по траекториям, близким к окружностям, вокруг некоторой общей оси, совпадающей с траекторией молнии. Направление движения электронов противоположно направлению движения ионов. При этом получается аксиально-симметричная структура, состоящая из нескольких слоёв. Радиусы слоёв различны, а так они зависят от скорости и масс, которыми обладает частица, вошедшая в структуру. В этой модели заряженная частица движется по окружности, создавая своё магнитное поле. Поля отдельных частиц суммируются. При этом в области шаровой молнии появляется собственное эффективное магнитное поле достаточно большое по величине, чтобы структура оказалась устойчивой. Следует отметить, что поля, создаваемые электронами и положительными ионами, направлены в одну и ту же сторону, то есть суммируются, из-за того, что они движутся в противоположных направлениях.

Рассмотрим поведение одной частицы, входящей в шаровую молнию. Она движется в эффективном магнитном поле H, создаваемом всеми частицами шаровой молнии. Число этих частиц предполагается достаточно большим. Для простоты вычислений положим их электронами. Очевидно, что распределение в пространстве всех электронов одинаково. Относительно эффективного поля H можно предположить, что оно должно быть достаточно большим внутри шаровой молнии для обеспечения её устойчивости, а также быстро спадать вне её. Предположение, что H однородно сводит модель к известной задаче о движении заряженной частицы в постоянном и однородном магнитном поле. Для простоты опишем уравнение Клейна-Гордона движения отдельной частицы (1)

$$\left\{E^2 - C^2\left(p^2 + \frac{l_0}{C}A\right)^2 - m^2c^4\right\}\psi(r,t) = 0 \tag{1}$$

где: H=(0,0,H); m-масса, - заряд электрона, c- скорость света.

Решение (1) в цилиндрической системе координат выгляди так [1]

$$\psi_{ns}(r,t) = l^{-ickt}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}l^{il\varphi}l^{\frac{i}{\,}}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}J_{ns}(\rho) \tag{2}$$

где: n, l, . S- главное, орбитальное, вертикальное и радиальное квантовые числа: Y_{ns} - функция Лагерра; $\rho = \gamma r^2$; $\gamma = \dfrac{l_0 H}{rch}$; L-длина периодичности по Z.

С помощью данного решения можно построить плотность тока по формуле

$$J = \frac{e\mathbf{h}}{2mei}\left[\psi^*\psi - \psi^*\psi\right] - \frac{e^2}{mc^2}\psi^*\psi A \tag{3}$$

А потом вычислить магнитное поле, создаваемое этим током. Вычисление удобно проводить в цилиндрической системе координат. Рассмотрим наиболее простой случай =S=0, тогда n=l

Несложные вычисления дают: $J_\rho = J_z = H_\rho = H_\varphi = 0$

$$J_j = -\sqrt{\frac{e_0 H_{c\bar{h}}}{2}}\frac{e_0 g}{pE_k LK!}\left[\frac{K}{\sqrt{r}} + \sqrt{r}\right]e^{-r}\cdot e^k$$

$$H_{z,k} = \frac{e_0^2 H}{E_k L}e^{-r}\left\{\sum_{m=0}^{k-1}\frac{r^m}{m!} + \sum_{m=0}^{k}\frac{r^m}{m!}\right\}$$

где: E_k - энергия электрона в состоянии с главным квантовым числом равным k=l

$$E_{k^2} = m^2c^4 + 2e_0 cH\bar{h}\left(e + \frac{g}{2}\right)$$

Эффективное поле должно равняться сумме полей отдельных электронов

$$H_z = \sum_{i=1}^{N} H_{zki}$$

где i - номер электрона

При малых r таких, что $r < l$, можно положить

$$\sum_{m=0}^{e}\frac{r^m}{m!} \approx e^r$$

тогда,

$$H_{zk} = \frac{e_0^2 H}{E_k L}e^{-r}\cdot 2e^r = \frac{2e_0^2 H}{E_k L}$$

Следовательно, в области малых r поле H можно считать не зависящим от r. В тоже время на больших расстояниях, при $r \to \infty$, $H_z = 0$ и эффективное поле H обращается в нуль. Характерный радиус модели получается из условия

$$gr^2 \approx 1 \qquad (5)$$

То есть, как это и предполагалось в начале, поле внутри частицы однородно и постоянно во времени, а вне её быстро спадает до нуля.

Аналогичная задача для положительных ионов даёт такой же результат.

Исходя Из этих рассуждений можно построить следующую модель шаровой молнии: шаровая молния представляет собой большое число разноименно заряженных объектов (электронов и ионов) движущихся по объектам в аксиально-симметричном магнитном поле, создаваемом этими же частицами. Суммарный заряд шаровой молнии равен нулю.

Так как радиусы орбит частиц, движущихся в магнитном поле, находятся по формуле

$$R \approx \frac{mv}{eB} \qquad (6)$$

А при распаде атомов из закона сохранения импульса следует:

$$m_e v_e \approx m_{из} v_{из} \qquad (7)$$

где: $m_e v_e , m_{из} v_{из}$ импульс электрона и изотопа.

То из (6) и (7) получается, что радиусы орбит электрона и изотопа примерно равны. То есть шаровая молния представляет собой нейтральное образование из круговых токов, движущихся навстречу друг другу электронов и положительных ионов.

Свечение и сопровождающее его звуковое потрескивание можно объяснить взаимодействием движущейся шаровой молнией вдоль электромагнитных полей Земли и взаимодействием её с окружающим воздухом.

In this paper we suggest the fire-ball model as neutral union of circle currents. These currents are the electrons which move one to other and ions in generated magnetic field. The interaction with this field keeps the particles on the orbits.

The key words: *fire-ball, circle currents, electrons, ions, magnetic field*

Список литературы

.Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М.: «Наука». 1974. С. 263-267

Об авторе

А.П. Будехин - Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

УДК 517.3

ОБ УСЛОВИИ БЛЯШКЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

С.В. Быков

В работе получено необходимое и достаточное условие на весовую функцию, при котором корневые множества каждой голоморфной функции из соответствующего весового класса функций удовлетворяют условию Бляшке.

Ключевые слова: *единичный круг, аналитическая функция, бесконечное произведение, условие Бляшке, угол Штольца.*

Пусть $\mathrm{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ и функция j - монотонно растущая на множестве $[1;+\infty)$.

Обозначим через $X_j^{\infty}(\mathrm{D})$ - класс функций:

$$X_j^{\infty}(\mathrm{D}) = \left\{ f \in H(\mathrm{D}) : \ln|f(z)| \le C_f \cdot j\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\ z \in \mathrm{D} \right\},$$

где C_f - положительная константа, зависящая только от функции f , если $f \in X_j^{\infty}(\mathrm{D})$, то $Z_f = \{z \in \mathrm{D} : f(z) = 0\}$.

Хорошо известно, что если $j(x) \equiv 1,\ x \in (1; +\infty)$, то есть $X_j^{\infty} = H^{\infty}$ (H^{∞} - множество всех ограниченных аналитических функций в D), то последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathrm{D}$ можно представить в виде Z_f для некоторой функции $f \in H^{\infty}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty. \qquad \textbf{(1)}$$

В то же время, как было установлено в работе **[5]**, для произвольной функции j , для которойвыполняется условие $\lim\limits_{x \to +\infty} j(x) = +\infty$, существует функция $f \in X_j^{\infty}(\mathrm{D})$, такая что $f \not\equiv 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} = Z_f$, при этом $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) = +\infty$.

Но ещё в 1945 году М. М. Джрбашяном в работах **[2]**, **[3]** было установлено, что если $j(x) = \ln x,\ x \in (1; +\infty)$ и если $f \in X_j^{\infty}$, причём $f(z_k) = 0,\ f \not\equiv 0$, а $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ находятся в некотором угле Штольца, то последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ удовлетворяет условию Бляшке **(1)**. В дальнейшем, такое же утверждение было установлено в работе Г. Шапиро и А. Шильдса (см. **[6]**) при $j(x) = x^a$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Как отмечено в этой работе, Д. Ж. Ньюмен выдвинул следующую гипотезу: если функция j удовлетворяет условию

$$\int_0^1 j\left(\frac{1}{1-x}\right) dx < +\infty, \qquad \textbf{(2)}$$

то вышеуказанное свойство нулей функции $f \in X_j^{\infty}$ - расположение нулей в некотором угле Штольца - удовлетворяет условию Бляшке **(1)**. Отметим, что если сделать замену переменной в интеграле **(2)** $t = \frac{1}{1-x}$ то получим, что сходимость интеграла **(4)** эквива-лентна условию

$$\int_1^{+\infty} \frac{j(u)}{u^2} du < +\infty. \qquad \textbf{(3)}$$

И, наконец, в работе **[5]** Б. И. Каремблюмом и У. Хейманом было установлено, что для того, чтобы для каждой функции $f \in X_j^{\infty},\ f \not\equiv 0,\ f(z_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$ из того, что точки последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ находятся в некотором угле Штольца следовало условие Бляшке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{j\left(\frac{1}{1-x}\right)}{1-x}} dx < +\infty \qquad \textbf{(4)}$$

или

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{j(x)}{x^3}} dx < +\infty. \qquad \textbf{(5)}$$

Нетрудно привести примеры функции j , для которых $\int_1^{+\infty} \frac{j(u)}{u^2} du < +\infty$ и одновременно $\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{j(u)}{u^3}} du = +\infty$. Например, $j(u) = \frac{u}{(\ln 2u)^{2s}}$, где $\frac{1}{2} < s < +\infty$. Очевидно, что $\int_1^{+\infty} \frac{j(u)}{u^2} du < +\infty$ в тоже время $\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{j(u)}{u^3}} du < +\infty$ только при $1 < s < +\infty$ и только при таких s. Справедливо более точное утверждение.

Лемма 1. *Пусть j - монотонно возрастающая положительная функция на $(1;+\infty)$ такая, что $\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{j(x)}{x^3}} dx < +\infty$, тогда $\int_1^{+\infty} \frac{j(x)}{x^2} dt < +\infty$.*

Доказательство.

Сначала заметим, что из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{j(x)}{x^3}} dx < +\infty$ следует, что $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_R^{+\infty} \sqrt{\frac{j(x)}{x^3}} dx = 0$. Но поскольку

$$\int_R^{+\infty} \sqrt{\frac{j(x)}{x^3}} dx \geq \sqrt{j(R)} \cdot \int_R^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{\frac{j(R)}{R}},$$

то отсюда следует, что $\frac{j(R)}{R} \to 0$ при $R \to +\infty$.

Следовательно, $\frac{R}{j(R)} \geq C_0 > 0$ при всех $R \in (1;+\infty)$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{j(x)}{x^3}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{j(x)}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{j(x)}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{j(x)}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{j(x)}} dx \geq C_0 \cdot \int_1^{+\infty} \frac{j(x)}{x^2} dx.$$

Ввиду сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{j(x)}{x^3}} dx$, следует сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{j(x)}{x^2} dt$.

Лемма доказана.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Оказывается, что гипотеза Д. Ж. Ньюмана верна в полуплоскости в следующем смысле:

Теорема 1. *Обозначим через $X_j^{\infty}(\square_+)$ - класс функций, аналитических в $\square_+$, для которых $\ln|f(z)| \leq C_f \cdot j(|z|)$, где C_f - положительная константа, зависящая только от функции f, при этом $j \in \square^1(1;+\infty)$ и $a_j = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{j'(x)\cdot x}{j(x)}$, где $0 < a_j < +\infty$. Тогда для того, чтобы $f \in X_j^{\infty}(\square_+)$, $f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f \not\equiv 0$ следовала $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{y_k} < +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_1^{+\infty} \frac{j(x)}{x^2} dx < +\infty.$$

Доказательство данной теоремы основано на нескольких вспомогательных утверждениях:

Лемма 2. *Бесконечное произведение*

$$B_p(z,z_k)=\prod_{k=1}^{+\infty}A_p(z,z_k)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2y_k(i+z)}{i(z_k+i)\left(\overline{z}_k-z\right)}\right)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{2y_k(i+z)}{i(z_k+i)\left(\overline{z}_k-z\right)}\right)^j$$

(6) *сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах* $\mathbb{C}_+$ *тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\operatorname{Im}z_k)^{p+1}}{|i+z_k|^{p+1}}. \qquad \textbf{(7)}$$

<u>Доказательство.</u>

Сначала докажем утверждение: если бесконечное произведение **(6)** сходится, то и ряд **(7)** также сходится.

Заметим, что из абсолютной равномерной сходимости бесконечного произведения $B_p(z,z_k)$ на комплексных подмножествах $\mathbb{C}_+$ следует абсолютная сходимость бесконечного произведения

$$B_p(i,z_k)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{4y_k}{|z_k+i|^2}\right)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{4y_k}{|z_k+i|^2}\right)^j,$$

где $z_k=x_k+iy_k$, $k=1,2,\ldots$ Положим

$$a_k=\frac{4y_k}{|z_k+i|^2},\ \ A_k=\left(1-\frac{4y_k}{x_k^2+(y_k+1)^2}\right)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{4y_k}{x_k^2+(y_k+1)^2}\right)^j,\ \ k=1,2,\ldots,$$

то есть $A_k=(1-a_k)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot a_k^j$. Таким образом, из условия леммы следует, что бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{+\infty}A_k$ сходится, поэтому, $A_k\to 1$ при $k\to+\infty$, то есть $a_k\to 0$ при $k\to+\infty$.

Следовательно, существует такое $k_0\in\mathbb{N}$, что при $k\geq k_0$ справедливо неравенство $0\leq a_k<\frac{1}{2}$.

Тогда из сходимости бесконечного произведения **(6)** следует абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\ln A_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln(1-a_k)+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot a_k^j\right).$$

Отсюда следует, что:

$$\ln A_k=\ln(1-a_k)+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot a_k^j=-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j}\cdot a_k^j+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot a_k^j=-\sum_{j=p+1}^{+\infty}\frac{1}{j}\cdot a_k^j.$$

Из этой оценки сразу следует, что $|\ln A_k|=-\ln A_k>\frac{a_k^{p+1}}{p+1}$, то есть $\frac{a_k^{p+1}}{p+1}<|\ln A_k|$. Следовательно, из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln A_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^{p+1}$, то есть ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\operatorname{Im}z_k)^{p+1}}{|i+z_k|^{p+1}}$ сходится.

Теперь докажем обратное утверждение, то есть из сходимости ряда **(7)** следует абсолютная и равномерная сходимость бесконечного произведения **(6)** на комплексных подмножествах $\mathbb{C}_+$.

Положим $w_k(z)=\dfrac{2y_k\cdot(i+z)}{i\cdot(z_k+i)\cdot\left(\overline{z_k}-z\right)}$, $z\in\mathbb{C}_+$. Обозначим через E- произвольный компакт в $\mathbb{C}_+$. Тогда существуют $d=d(E)>0$ и $R=R(E)$ такие, что $\forall z\in E$: $|z|\le R$ и $\operatorname{Im} z>d$. Поэтому учитывая сходимость ряда **(7)** можем утверждать, что существует $k=k_0(E)\in\mathbb{N}$ так, что

$$\left|w_k(z)\right|<\frac{1}{2} \text{ при } k\ge k_0(E).$$

Пусть $A_k(z)=\left(1-w_k(z)\right)\cdot\exp\sum\limits_{j=1}^{p}\dfrac{1}{j}\left(w_k(z)\right)^j$, $\forall z\in E,\ k\ge k_0$.

Тогда, учитывая оценку $w_k(z)$, получим:

$$\left|A_k(z)\right|=\left|\left(1-w_k(z)\right)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(w_k(z)\right)^j\right|=\exp\left(\operatorname{Re}\left(\ln\left(1-w_k(z)\right)\right)+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(w_k(z)\right)^j\right)=$$

$$=\exp\left(\operatorname{Re}\left(-\sum_{j=p+1}^{+\infty}\frac{1}{j}\left(w_k(z)\right)^j\right)\right),\ z\in E.$$

Поэтому $\left|1-A_k(z)\right|=\left|1-\exp\left(\operatorname{Re}\left(-\sum\limits_{j=p+1}^{+\infty}\dfrac{1}{j}\left(w_k(z)\right)^j\right)\right)\right|$.

Теперь, заметим, что

$$\sum_{j=p+1}^{+\infty}\left|\frac{1}{j}\left(w_k(z)\right)^j\right|\le\frac{\left|w_k(z)\right|^{p+1}}{p+1}\cdot\sum_{j=p+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j-p-1}}\le\frac{2}{p+1}\cdot\left|w_k(z)\right|^{p+1}.$$

Учитывая, что ряд **(7)** равномерно сходится на множестве E, получим то, что требовалось доказать.

Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом оценки произведения Вейерштрасса для функции B_p.

Лемма 3. *Пусть задана последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *из верхней полуплоскости, для которой ряд* **(7)** *сходится. Тогда бесконечное произведение* **(6)** $B_p(z,z_k)$ *сходится, и причём*

$$\ln\left|B_p(z,z_k)\right|\le 2^{p+2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{2y_k(i+z)}{i(z_k+i)\left(\overline{z_k}-z\right)}\right|^{p+1}. \qquad \textbf{(8)}$$

Доказательство.

Положим $v_k(z,z_k)=\dfrac{2y_k(i+z)}{i(z_k+i)\left(\overline{z_k}-z\right)}$, тогда

$$A_p(z,z_k)=\left(1-v_k(z,z_k)\right)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(v_k(z,z_k)\right)^j.$$

Предположим сначала, что $\left|v_k(z,z_k)\right|\le\dfrac{1}{2}$.

Тогда, выбирая главную ветвь логарифма, получим:

$$\ln A_p(z,z_k)=\ln\left(1-v_k(z,z_k)\right)+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(v_k(z,z_k)\right)^j.$$

Разлагая тогда логарифм в степенной ряд, и учитывая оценку $\left|v_k(z,z_k)\right| \le \dfrac{1}{2}$,

получаем, что $\ln\left|A_p(z,z_k)\right| \le \sum\limits_{j=p+1}^{+\infty}\left|v_k(z,z_k)\right|^j \le 2\cdot\left|v_k(z,z_k)\right|^{p+1}$.

Если же $\left|v_k(z,z_k)\right| > \dfrac{1}{2}$, учитывая, что при $x>0$ справедливо неравенство $\ln(x+1)\le x$, имеем:

$$\left|A_p(z,z_k)\right| = \left|(1-v_k(z,z_k))\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot(v_k(z,z_k))^j\right| \le$$

$$\le\left(1+\left|v_k(z,z_k)\right|\right)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left|v_k(z,z_k)\right|^j = \exp\ln\left(1+\left|v_k(z,z_k)\right|\right)+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left|v_k(z,z_k)\right|^j \le$$

$$\le\exp\left|v_k(z,z_k)\right|^{p+1}\cdot\left(2^{p-1}+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\frac{1}{\left|v_k(z,z_k)\right|^{p+1-j}}\right)\le\exp\left|v_k(z,z_k)\right|^{p+1}\cdot 2^{p+2}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы и оценка данного бесконечного произведения.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $a_j = \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{j^{/}(x)\cdot x}{j(x)} < +\infty$, p - произвольное натуральное число, такое, что $p > a_j$. Тогда существует $x_0 = x_0(p)$ такое, что функция $f(x)=\dfrac{j(x)}{x^p}$ монотонно убывает при $x > x_0$.

Доказательство.

Вычислим производную функции $f(x)=\dfrac{j(x)}{x^p}$:

$$f^{/}(x)=\frac{j^{/}(x)\cdot x^p - p\cdot x^{p-1}\cdot j^{/}(x)}{x^{2p}}=\frac{j^{/}(x)\cdot x - p\cdot j(x)}{x^{p+1}}=\frac{j(x)\cdot\left(\dfrac{j^{/}(x)\cdot x}{j(x)}-p\right)}{x^{p+1}}.$$

Очевидно, что $\dfrac{j'(x)\cdot x}{j(x)} < p$ при $x > x_0(p)$, а это и означает, что $\dfrac{j'(x)\cdot x}{j(x)} - p < 0$ при $x > x_0(p)$. Поэтому, понятно, что $f^{/}(x) < 0$ при $x > x_0(p)$. А это и означает, что функция $f(x)=\dfrac{j(x)}{x^p}$ монотонно убывает при $x > x_0$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы.

Докажем сначала, что если $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{j(x)}{x^2}dx < +\infty$, то из условия $f \in X_j^{\infty}(\mathbb{C}_+)$, $f(iy_k)=0,\ k=1,2,\ldots,\ f\not\equiv 0,\ y_k > d > 0,\ k=1,2,\ldots$, следует, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{y_k} < +\infty$.

Указанное утверждение можно вывести из формулы Карлемана (см. например, **[1]**). Действительно, пусть $0 < r < R < +\infty$, $C_{R,r} : \left\{z\in\mathbb{C}_+ : r < |z| < R\right\}$.

Положим $f_h(z) = f(z+ih)$, $h>0$. Тогда функция $f_h(z)$ является аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_h\left\{z\in\mathbb{C}, \operatorname{Im} z > -h\right\}$. Поэтому можно применить к функции $f_h(z)$ формулу Карлемана:

$$\sum_{0<\rho<r_n\le R}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{r_n}{R^2}\right)\cdot\sin\theta_n=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}\ln\left|f_\eta\left(Re^{i\theta}\right)\right|\cdot\sin\theta d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{-i\theta}}{x^2}-\frac{\rho e^{i\theta}}{R^2}\right)\cdot\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}+i\eta\right)\right|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_\rho^R\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\cdot\ln\left|f\left(t+i\eta\right)\right|\cdot\left|f\left(i\eta-t\right)\right|dt,$$

где $z_k=r_ke^{i\theta_k}$, $k=1,2,...$- нули функции f_h в кольце $C_{r,R}$.

Теперь заметим, что из оценки $\ln\left|f(z)\right|\le C_f\cdot j\left(|z|\right)$ следует, что

$$\ln\left|f(z+ih)\right|\le C_f\cdot j\left(|z+ih|\right)\le C_f\cdot j\left(h+|z|\right).$$

Учитывая эту оценку, получаем:

$$\sum_{0<\rho<r_n\le R}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{r_n}{R^2}\right)\cdot\sin\theta_n\le\frac{2C_f\cdot\varphi\left(R+\eta\right)}{\pi R}+$$
$$+\frac{2C_f}{2\pi}\int_\rho^R\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\cdot\varphi\left(t+\eta\right)dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{-i\theta}}{\rho}-\frac{\rho e^{i\theta}}{R^2}\right)\cdot\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}+i\eta\right)\right|d\theta.$$

Теперь, переходя к пределу при $\eta\to 0$, и подбирая ρ таким образом, чтобы $f\left(\rho e^{i\theta}\right)\ne 0$, для всех $\theta\in\left(0;\pi\right]$, получим следующую оценку:

$$\sum_{0<\rho<r_n\le R}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{r_n}{R^2}\right)\cdot\sin\theta_n\le\frac{2C_f\cdot\varphi\left(R\right)}{R}+\frac{C_f}{\pi}\int_\rho^R\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\cdot\varphi\left(t\right)dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{-i\theta}}{\rho}-\frac{\rho e^{i\theta}}{R^2}\right|\cdot\left|\ln f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta.$$

Учитывая, что каждое слагаемое в левой части неравенства неотрицательно, из этой оценки непосредственно следует, что

$$\sum_{0<\rho<y_n\le R}\left(\frac{1}{y_n}-\frac{y_n}{R^2}\right)\le 2C_f\cdot\frac{\varphi\left(R\right)}{R}+\frac{C_f}{\pi}\int_\rho^R\frac{\varphi\left(t\right)}{t^2}dt.$$

Следовательно,

$$\sum_{0<\rho<y_n\le\frac{R}{2}}\left(\frac{1}{y_n}-\frac{y_n}{R^2}\right)\le 2C_f\cdot\frac{\varphi\left(R\right)}{R}+\frac{C_f}{\pi}\int_\rho^R\frac{\varphi\left(t\right)}{t^2}dt+A\left(\rho,f\right)\qquad\textbf{(9)}$$

Теперь заметим, что при $\rho<y_n\le\frac{R}{2}$, имеем: $\frac{1}{y_n}-\frac{y_n}{R^2}\ge\frac{1}{y_n}-\frac{y_n}{4y_n^{\ 2}}=\frac{3}{4}\frac{1}{y_n}$.

В итоге из неравенства **(9),** окончательно, получим:

$$\frac{3}{4}\cdot\sum_{\rho<y_n\le\frac{R}{2}}\frac{1}{y_n}\le 2C_f\cdot\frac{\varphi\left(R\right)}{R}+\frac{C_f}{\pi}\int_\rho^R\frac{\varphi\left(t\right)}{t^2}dt.$$

Но из условия монотонности функции j и сходимости интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{j\left(x\right)}{x^2}dx$ следует, что

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{j\left(R\right)}{R}=0.\qquad\textbf{(10)}$$

Действительно, $\int_R^{2R}\frac{j\left(x\right)}{x^2}dx\to 0$ при $R\to+\infty$. Поэтому, $j\left(R\right)\cdot\int_R^{2R}\frac{dx}{x^2}\le\int_R^{2R}\frac{j\left(x\right)}{x^2}dx$, то есть $\frac{j\left(R\right)}{2R}\le\int_R^{2R}\frac{j\left(x\right)}{x^2}dx$. Тогда устремляя $R\to+\infty$, получим свойство **(10).**

Переходя к пределу при $R\to+\infty$, получим:

$$\sum_{\rho<y_n<+\infty}\frac{1}{y_n}\le\frac{2C_f}{\pi}\cdot\int_{\rho}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt.$$

И, таким образом, необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность, то есть, что если $\int_1^{+\infty}\frac{j(x)}{x^2}dt=+\infty$, то существует функция f из класса $X_j^{\infty}(\mathbb{C}_+)$, такая, что $f\not\equiv 0$, причём $f(iy_k)=0$, $k=1,2,\ldots$, для которой

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{y_k}=+\infty\,.$$

Построим соответствующую функцию в виде бесконечного произведения из *леммы 1.8*. Разобьём полуось на полузамкнутые интервалы $[1;+\infty)=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\Delta_k$, где $\Delta_k=\{y:2^k\le y\le 2^{k+1}\}$. Построим последовательность y_k следующим образом: $y_k=2^k$, причём кратность y_k равна $\left[j\left(2^k\right)\right]$, где $[a]$ - целая часть а. Тогда если $\int_1^{+\infty}\frac{j(x)}{x^2}dt=+\infty$, то $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{y_k}=+\infty$.

Действительно, для любого $1<q<+\infty$

$$\int_1^{2^q}\frac{j(t)}{t^2}dt=\sum_{k=0}^{q-1}\int_{\Delta_k}\frac{j(t)}{t^2}dt=\sum_{k=0}^{q-1}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{j(t)}{t^2}dt\,. \qquad \textbf{(11)}$$

Тогда из равенства **(11)**, получаем:

$$\int_1^{2^q}\frac{j(t)}{t^2}dt=\sum_{k=0}^{q-1}\frac{j\left(2^{k+1}\right)}{2^{k+1}}\,.$$

Устремляя $q\to+\infty$, учитывая **(11)**, получим:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j\left(2^{k+1}\right)}{2^{k+1}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{j\left(2^{k}\right)}{2^{k}}=+\infty,\ \text{то есть}\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{y_k}=+\infty\,.$$

Докажем, что в этих условиях произведение $B_p(z,iy_n)$ сходится при $p>a_j$, где $a_j=\lim_{x\to\infty}\frac{j'(x)\cdot x}{j(x)}$ на компактных подмножествах в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, при этом

$$\ln\left|B_p\left(z,iy_n\right)\right|\le C_f\cdot j\left(|z|\right)\ \text{при всех}\ z\in\mathbb{C}_+\,.$$

Воспользуемся оценкой **(8)** из *леммы 3* для произведения $B_p(z,iy_n)$, то есть

$$\ln\left|B_p(z,z_k)\right|\le 2^{p+2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{2y_k(i+z)}{i(z_k+i)\left(\overline{z}_k-z\right)}\right|^{p+1}.$$

Положим $z=x+iy$, $z_k=iy_k$, $k=1,2,\ldots$,тогда последнюю оценку можно записать в виде

$$\ln\left|B_p(x+iy,iy_k)\right|\le 2^{p+2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{2y_k\cdot\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{(y_k+1)^2\cdot\sqrt{x^2+(y+y_k)^2}}\right|^{p+1}.$$

Перейдём к оценке последней суммы:

$$I=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{(y+1)^2+x^2}}{\sqrt{(y+y_k)^2+x^2}}\right)^{p+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{y_j\in\Delta_k}\left(\frac{(y+1)^2+x^2}{(y+y_k)^2+x^2}\right)^{\frac{p+1}{2}}. \qquad \textbf{(12)}$$

Напомним, что Δ_k - полузамкнутый интервал , $\Delta_k=\{y:2^k\le y<2^{k+1}\}$.

Пусть $|z|=|x+iy|$ удовлетворяет оценке $2^n\le|z|<2^{n+1}$, то есть $|z|\in\Delta_n$, где n - фиксированное натуральное число, тогда согласно выбора последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ из **(12)** следует, что

$$I \le 2^{p+2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} j\left(2^k\right) \frac{2^{n(p+1)}}{\left(\left(y_k + y\right)^2 + x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} \le C \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} j\left(2^k\right) \frac{2^{n(p+1)}}{\left(\left(2^k + y\right)^2 + x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} = C \cdot \left(I_1 + I_2\right),$$

где $I_1 = \sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right) \frac{2^{n(p+1)}}{\left(\left(2^k + y\right)^2 + x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}$, $I_2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} j\left(2^k\right) \frac{2^{n(p+1)}}{\left(\left(2^k + y\right)^2 + x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}$.

Оценим каждую сумму в отдельности.

Ясно, что

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right) \cdot \frac{2^{n(p+1)}}{\left(x^2 + y^2 + 2^{k+1} \cdot y + 4^k\right)^{\frac{p+1}{2}}} \le \sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right) \cdot \frac{2^{n(p+1)}}{\left(4^n + 4^k + 2^{k+1} \cdot y\right)^{\frac{p+1}{2}}}. \qquad \textbf{(13)}$$

Но поскольку $2^{k+1} \cdot y \le 2^{k+1} \cdot 2^{n+1}$, то есть $2^{k+1} \cdot y \le 2^{k+4} \cdot 4 \le 4^{n+1}$ при $k \le n$, то из оценки **(13)** получаем, что:

$$I_1 \le \sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right) \cdot \frac{2^{n(p+1)}}{2^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right).$$

Теперь заметим, что $j \in \square^{1}\left(1;+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{j^{/}(x) \cdot x}{j(x)} = a_j < +\infty$. Отсюда, как установлено выше, нетрудно вывести оценки

$$j(x) \le C_e \cdot x^{a_j + e} \text{ при } x \ge 1,\ C_e > 0,$$

где $e > 0$ - произвольное положительное число и оценку

$$j\ (2x) \le C_j \cdot j\left(x\right) \qquad \textbf{(14)}$$

И поэтому $\int_1^{+\infty} \frac{j\left(x\right)}{x^{p+1}} dx < +\infty$ при $p > a_j$, при этом $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j\left(2^k\right)}{2^{k(p+1)}} < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j\left(2^k\right)}{2^{k(p+1-a_j-e)}} < +\infty$,

если $p + 1 - a_j - e > 0$, то есть при $p > a_j - 1$.

Поэтому, сходимость бесконечного произведения $B_p(z, iy_n)$, согласно *лемме 2*, обеспечена.

Докажем, что

$$\sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right) \le C_j \cdot j\left(2^n\right). \qquad \textbf{(15)}$$

Действительно, сначала отметим, что $\sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right) \le 2 \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{j\left(t\right)}{t} dt,\ k = 0,1,\dots,n$.

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right) \le 2 \int_1^{2^{n+1}} \frac{j\left(t\right)}{t} dt. \qquad \textbf{(16)}$$

Положим

$$J\left(y\right) = \int_1^{y} \frac{j\left(t\right)}{t} dt. \qquad \textbf{(17)}$$

Докажем, что если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{j^{/}(x) \cdot x}{j(x)} = a_j < +\infty$, то $J\left(y\right) \square\, j\left(y\right)$ при $y \to +\infty$. Для этого применим правило Лопиталя:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{J\left(y\right)}{j\left(y\right)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{j\left(y\right)}{y}}{j^{/}\left(y\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{j^{/}\left(y\right) \cdot y}{j\left(y\right)}} = \frac{1}{a_j}.$$

Поэтому при $y > y_0\left(e\right)$, имеем:

$$\left(\frac{1}{a_j}-e\right)\cdot j\left(y\right)\leq J\left(y\right)<\left(\frac{1}{a_j}+e\right)\cdot j\left(y\right),$$

то есть можно найти такие константы $C_1,\ C_2>0$ так, что

$$C_1\cdot j\left(y\right)\leq J\left(y\right)<C_2\cdot j\left(y\right),\ \ y\in\left[1;+\infty\right).$$

Следовательно, из оценки **(16)**, вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right)\leq C_1\cdot j\left(2^{n+1}\right).$$

Учитывая оценку **(14)**, окончательно получим:

$$I_1\leq C_1\cdot\sum_{k=0}^{n} j\left(2^k\right)\leq C\cdot j\left(2^n\right)\leq C\cdot j\left(\left|z\right|\right). \qquad \textbf{(18)}$$

Оценим I_2.

$$I_2=\sum_{k=n+1}^{+\infty} j\left(2^k\right)\frac{2^{n(p+1)}}{\left(\left(2^k+y\right)^2+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}=\sum_{k=n+1}^{+\infty} j\left(2^k\right)\frac{2^{n(p+1)}}{\left(x^2+y^2+2^{k+1}\cdot y+4^k\right)^{\frac{p+1}{2}}}=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{+\infty} j\left(2^k\right)\frac{2^{n(p+1)}}{\left(\left|z\right|^2+2^{k+1}\cdot y+4^k\right)^{\frac{p+1}{2}}}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty} j\left(2^k\right)\frac{2^{n(p+1)}}{\left(4^n+4^k\right)^{\frac{p+1}{2}}} \qquad \textbf{(19)}$$

Теперь, учитывая, что $4^n+4^k+2^{n+k+1}\leq 2\cdot\left(4^n+4^k\right)$ и из оценки **(19)**, получаем:

$$I_2\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty} j\left(2^k\right)\cdot\left(\frac{2^n}{2^n+2^k}\right)^{p+1}<2^{n(p+1)+1}\cdot\sum_{k=n+1}^{+\infty} j\left(2^k\right)\cdot\frac{1}{2^{k(p+1)}} \qquad \textbf{(20)}$$

Аналогично, как выше, используем неравенство $\frac{1}{2^{k(p+1)}}\leq 2^p\cdot\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{dt}{t^{p+2}}$, и поэтому

$$\frac{j\left(2^k\right)}{2^{k(p+1)}}\leq 2^p\cdot\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{j\left(t\right)}{t^{p+2}}dt.$$

Из оценки **(20)**, выводим $I_2\leq 2^{n(p+1)+1+p}\cdot\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{j\left(t\right)}{t^{p+2}}dt$, то есть

$$I_2\leq 2^{(n+1)(p+1)}\cdot\int_{2^{n+1}}^{+\infty}\frac{j\left(t\right)}{t^{p+2}}dt, \qquad \textbf{(21)}$$

где p - произвольное целое число, для которой

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j\left(2^k\right)}{2^{k(p+1)}}<+\infty.$$

Продолжим оценку интеграла **(21)**. Предположим, что $x\in\left(1;+\infty\right)$, $x>x_0\left(p\right)$. Обозначив $x=2^{n+1}$, получим, что :

$$I_2\leq x^{p+1}\cdot\int_{x}^{+\infty}\frac{j\left(t\right)}{t^{p+2}}dt \qquad \textbf{(22)}$$

Положив $J_1\left(x\right)=\int_{x}^{+\infty}\frac{j\left(t\right)}{t^{p+2}}dt$ и $y\left(x\right)=\frac{j\left(x\right)}{x^{p+1}}$, $x\in\left(1;+\infty\right)$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{J_1\left(x\right)}{y\left(x\right)}=C_0>0$. Для этого применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{J_1(x)}{y(x)}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{j(x)}{x^{p+2}}}{\dfrac{j'(x)\cdot x^{p+1}-(p+1)\cdot x^{p}\cdot j(x)}{x^{2(p+1)}}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{j(x)}{x^{p+2}}}{\dfrac{\left[j'(x)\cdot x-(p+1)\cdot j(x)\right]\cdot x^{p}}{x^{2(p+1)}}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{j(x)}{x^{p+2}}}{\dfrac{\left[j'(x)\cdot x-(p+1)\cdot j(x)\right]\cdot x^{p}}{x^{2(p+1)}}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{j'(x)\cdot x}{j(x)}-(p+1)}=-\frac{1}{a_j-(p+1)}=$$

$=\dfrac{1}{p+1-a_j}>0.$ Следовательно, $J_1(x)\le C_0\cdot\dfrac{j(x)}{x^{p+1}}$ при $x>x_0$, или $x^{p+1}\cdot J_1(x)\le C_0\cdot j(x)$, $x\in(1;+\infty)$. Из оценки **(22),** выводим,

$$I_2\le C\cdot j(|z|). \qquad \textbf{(23)}$$

Объединяя оценки **(18)** и **(23)**, окончательно получаем, что

$$\ln\left|B_p(z,iy_k)\right|\le C\cdot j(|z|).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В теореме предполагалось, что $a_j>0$. Однако, указанное условие не существенно. Например, если $a_j=0$, то вместо веса $j(x)$ можно подобрать $j_1(x)=x^{e}+j(x)$, где $0<e<1$, и теорему можно будет доказать аналогичным образом но уже для $X^{\infty}_{j_1}$, очевидно, что $X^{\infty}_{j}\subset X^{\infty}_{j_1}$, а условие $a_j<0$ можно заменить условием

$$\tilde{a}_j=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{j'(x)\cdot x}{j(x)}<+\infty .$$

Замечание 2. В доказательстве теоремы предполагалось, что $j\in C^1(1;+\infty)$. Однако, это не нарушает общность, поскольку если $j_1(x)=\int\limits_x^{2x}\frac{j(t)}{t}dt$, то легко видеть, что

$$\ln 2\cdot j(x)\le j_1(x)\le\ln 2\cdot j(2x),$$

поэтому $\int\limits_1^{+\infty}\frac{j_1(x)}{x^2}dx\le\ln 2\cdot\int\limits_1^{+\infty}\frac{j(2x)}{x^2}dx=2\ln 2\cdot\int\limits_2^{+\infty}\frac{j(t)}{t^2}dt<+\infty.$ Ясно, что $X^{\infty}_{j}\subset X^{\infty}_{j_1}$, поэтому если теорема верна для $X^{\infty}_{j_1}$, то она справедлива также и для класса X^{∞}_{j}.

In this article the necessary and sufficient condition to weight function, on which nullity sets of every holomorphic function from proper class satisfy Blaschke's condition is received.
The key words: *unit disk, analytic functions, infinity production, Blashke`s condition, angle of Schtolz.*

Список литературы

1. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. 1986. С. 29-41.
2. Джрбашян М.М. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН АрмССР.945. Т. 3, №1. С. 3-9.
3. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР. 1948. Т. 3. С. 3-40.
4. Bagemihl F, Erdos P. and Seidel, Sur quelques proprietes frontiers des functions holomorphes definies par cartains produits dans le cercle – unite. Ann. Sci. Ecole Norm. sup (3) 70, 1953, pp. 135-147.

5. Hayman W. K. and Korenblum B. A critical growth rate for functions Regular in a disk. Michigan Math. Journal, Vol. 27, 1980, pp. 21-29.

6. Shapiro H. S. and A. Shields On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces. Math. Z. Vol. 80, 1962, pp. 217-229.

Об авторе

С.В. Быков – асс. кафедры мат. анализа Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского,e-mail: b_serecha@mail.ru.

УДК 517.5

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ S_w^p НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

И.С. Кипень

В работе получены необходимое и достаточное условия принадлежности аналитических функций специального вида классу S_w^p в случае p=1 и достаточное условие в случае 0<p<1.

Ключевые слова: *аналитические функции, единичный круг, характеристика Р. Неванлинны, класс* S_w^p .

Классом S_w^p назовем множество всех аналитических в единичном круге функций, удовлетворяющих условию

$$\|T(f)\|_{L^p} = \left(\int_0^1 w(1-r) T^p(f,r)dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \ , \qquad (1)$$

где $T(f,r) = \dfrac{1}{2p} \int\limits_{-p}^{p} \ln^+ \left| f(re^{ij}) \right| dj$ - характеристика Неванлинны (см. [1]), w - положительная на (0;1] функция из $L^1(0;1)$.

В случае p=1 класс S_w^p обозначим через S_w .

Обозначим символом S множество всех положительных на (0:+∞) функций $w \in L^1(0, A)$ для произвольного A>0, для которых существуют числа m_w, M_w, q_w , причем $m_w, q_w \in (0,1)$, $M_w > 0$ такие, что

$$m_w \le \frac{w(l\,x)}{w(x)} \le M_w \qquad \text{при} \qquad x > 0,\ l \in [q_w, 1].$$

Учитывая результаты работы [2], можно доказать, что если $w \in S$, то найдутся измеримые ограниченные функции e(x), $h(x)$ такие что

$$w(x) = \exp\left\{ h(x) + \int_x^1 \frac{e(t)}{t} dt \right\}, \qquad x>0, \qquad (2)$$

при этом

$$\frac{\ln m_w}{\ln \frac{1}{q_w}} \le e(t) \le \frac{\ln M_w}{\ln \frac{1}{q_w}}, \qquad t>0. \tag{3}$$

Без ограничения общности можно считать, что $h(x)=0$. Для удобства обозначим $a_w = \frac{\ln m_w}{\ln q_w}$, $b_w = \frac{\ln M_w}{\ln \frac{1}{q_w}}$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ:№09-01-97517

Лемма 1. Если $w\in S$, то при $0<x<1$ справедлива оценка

$$x^{a_w} \le w(x) \le x^{-b_w}. \tag{4}$$

Доказательство.

Из соотношений (2), (3) получаем, что при $0<x<1$

$$w(x) = \exp\left\{\int_x^1 \frac{e(t)}{t}dt\right\} \le \exp\left\{b_w \int_x^1 \frac{dt}{t}\right\} = \exp\left\{b_w \ln\frac{1}{x}\right\} = x^{-b_w}.$$

С другой стороны,

$$w(x) \ge \exp\left\{-a_w \int_x^1 \frac{dt}{t}\right\} = \exp\left\{-a_w \ln\frac{1}{x}\right\} = x^{a_w}.$$

Следовательно, неравенство (4) имеет место.

Отметим также, что из доказанного соотношения следует, что $a_w>-1$.

Лемма 2. Пусть $w\in S$, $b_w\in(0;1)$. Тогда при $0<t_1<t_2<\infty$ имеет место оценка

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{a_w} \cdot w(t_2) \le w(t_1) \le \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{b_w} \cdot w(t_2).$$

Доказательство.

Используя представление (2) и неравенство $-a_w \le e(t) \le b_w$, можем записать

$$\frac{w(t_1)}{w(t_2)} = \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} \frac{e(u)}{u}du\right\} \ge \exp\left\{-a_w \int_{t_1}^{t_2} \frac{du}{u}\right\} = \exp\left\{-a_w \ln\frac{t_2}{t_1}\right\} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{a_w}.$$

Значит, $w(t_1) \ge \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{a_w} \cdot w(t_2)$. С другой стороны,

$$\frac{w(t_1)}{w(t_2)} \le \exp\left\{b_w \int_{t_1}^{t_2} \frac{du}{u}\right\} = \exp\left\{b_w \ln\frac{t_2}{t_1}\right\} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{b_w}.$$

Отсюда $w(t_1) \le \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{b_w} \cdot w(t_2)$.

Лемма 3. Пусть $w\in S$, $b_w\in(0;1)$. Тогда имеют место следующие соотношения

$$\lim_{t\to 0} tw(t) = 0, \tag{5}$$

$$\int_0^1 w(t)\ln\frac{1}{t}dt < +\infty. \tag{6}$$

Доказательство.

Соотношение (5) непосредственно вытекает из оценки (4). Используя эту же оценку и сходимость интеграла $\int_0^1 t^{b_w} \ln\frac{1}{t}dt$ при $b_w \in (0;1)$, устанавливаем (6).

Следующая лемма установлена в [3].

Лемма 4. Пусть $0<g<+\infty$, $|q|<\dfrac{p}{4(g+1)}$. Тогда при всех t, $r\in(0;1)$ имеет место оценка

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-t}{rt}+e^{-iq}\right)^{g+1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Теорема 1. Пусть $w\in S$, $b_w\in(0;1)$, $g>1+a_w$ и функция f представима в виде

$$f(z)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(r_k-z)^{g+1}}\right\}, \tag{7}$$

где $r_k \downarrow 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

a) Если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{g-1}}<+\infty, \tag{8}$$

где c_k - комплексные числа (k=1,2,...), то функция $f(z)$ принадлежит классу S_w.

b) И обратно, если c_k - действительные числа (k=1,2,...) и $c_k>0$, при этом функция $f(z)$ принадлежит классу S_w, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{g-1}}<+\infty. \tag{9}$$

Следствие. Пусть $w\in S$, $b_w\in(0;1)$, $g>1+a_w$ и функция f представима в виде (7). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) $f\in S_w$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{g-1}}<+\infty$,

где c_k – положительные действительные числа (k=1,2,...)

Замечание. Достаточность условия (9) для принадлежности функции f классу S_w в случае $w(t)=t^a$ ($a>-1$) была установлена М.Н. Шереметой в статье [4].

Доказательство теоремы 1.

Пусть выполнено условие (8). Оценим сверху интеграл $I=\int_0^1 w(1-r)T(f,r)dr$. Функцию $f(z)$ запишем в виде

$$f(z)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(r_k-z)^{g+1}}\right\}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{r_k^{g+1}\left(1-\frac{1}{r_k}z\right)^{g+1}}\right\}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k\,r_k{}^{g+1}}{(1-r_k z)^{g+1}}\right\}, \tag{10}$$

где $r_k=\dfrac{1}{r_k}$, $r_k\uparrow 1$ при $r_k\downarrow 1$. Для функции f имеем

$$T(f,r)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{c_k r_k{}^{g+1}}{(1-r_k re^{ij})^{g+1}}\right\}^{+}dj\le\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|\,r_k{}^{g+1}}{|1-r_k re^{ij}|^{g+1}}\right\}dj=$$

$$=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,r_k{}^{g+1}\int_{-p}^{p}\frac{dj}{|1-r_k re^{ij}|^{g+1}}.$$

Учитывая оценку

$$\int_{-p}^{p}\frac{dj}{|1-r\,re^{ij}|^{a+1}}\le\frac{c(a)}{(1-r\,r)^{a}},$$

справедливую при $a>0$, будем иметь

$$T(f,r)\le c_1(g)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|\,r_k{}^{g+1}}{(1-r_k r)^{g}}=c_1(g)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|\,r_k}{(r_k-r)^{g}}\le c_1(g)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{(r_k-r)^{g}},$$

где $r_k=\frac{1}{r_k}$. Тогда

$$I\le c_1(g)\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\int_0^1\frac{w(1-r)}{(r_k-r)^{g}}dr.$$

После замены переменной получим

$$I\le c_1(g)\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\int_0^1\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^{g}}dt. \qquad (11)$$

Докажем справедливость оценки

$$\int_0^1\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^{g}}dt\le const\,\frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{g-1}}. \qquad (12)$$

Имеем

$$\int_0^1\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^{g}}dt=\int_0^{r_k-1}\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^{g}}dt+\int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^{g}}dt. \qquad (13)$$

Рассмотрим вначале первый интеграл

$$\int_0^{r_k-1}\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^{g}}dt\le\frac{1}{(r_k-1)^{g}}\int_0^{r_k-1}w(t)dt. \qquad (14)$$

Интегрируя по частям и применяя соотношение (5), получим

$$\int_0^{r_k-1}w(t)dt=(r_k-1)w(r_k-1)+\int_0^{r_k-1}w(t)e(t)dt.$$

Отсюда

$$\int_0^{r_k-1}w(t)(1-e(t))dt=(r_k-1)w(r_k-1).$$

Учитывая неравенства $e(t)\le b_w$ и $b_w\in(0;1)$, получаем

$$\int_0^{r_k-1}w(t)dt\le\frac{1}{1-b_w}(r_k-1)w(r_k-1)$$

и, значит, из (14) следует

$$\int_0^{r_k-1}\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^{g}}dt\le\frac{w(r_k-1)}{(1-b_w)(r_k-1)^{g-1}}. \qquad (15)$$

Оценим теперь второй интеграл в (13).

$$\int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)}{(r_k-1+t)^g}dt \le \int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)}{t^g}dt .$$

Снова интегрируя по частям, получим

$$\int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)}{t^g}dt = \frac{w(r_k-1)}{(g-1)(r_k-1)^{g-1}} - \frac{1}{g-1}\int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)e(t)}{t^g}dt .$$

Значит,

$$\int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)}{t^g}\left(1+\frac{e(t)}{g-1}\right)dt = \frac{w(r_k-1)}{(g-1)(r_k-1)^{g-1}} .$$

Поскольку $e(t) \ge -a_w$,

$$\left(1-\frac{a_w}{g-1}\right)\int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)}{t^g}dt = \frac{w(r_k-1)}{(g-1)(r_k-1)^{g-1}} .$$

И, следовательно, при $g>1+a_w$

$$\int_{r_k-1}^{1}\frac{w(t)}{t^g}dt \le \frac{w(r_k-1)}{(g-1-a_w)(r_k-1)^{g-1}} . \tag{16}$$

Подставляя оценки (15), (16) в соотношение (13), получим требуемую оценку (12). Используя ее, из неравенства (11) будем иметь

$$I = \int_0^1 w(1-r)T(f,r)dr \le c\left(a_w, b_w, g\right)\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{g-1}} . \tag{17}$$

Следовательно, при выполнении условия (8) и $g>1+a_w$ функция f принадлежит классу S_w .

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнено (1). Сначала покажем, что условия

$$\int_0^1 w(1-r)T(f,r)dr < +\infty \text{ и } \int_0^1 w\left(1-r^2\right)T(f,r)dr < +\infty$$

эквивалентны.

Для этого применим лемму 2 при $t_1=1-r^2$, $t_2=2(1-r)$:

$$\left(\frac{1-r^2}{2(1-r)}\right)^{a_w}\cdot w(2(1-r)) \le w(1-r^2) \le \left(\frac{2(1-r)}{1-r^2}\right)^{b_w}\cdot w(2(1-r))$$

или

$$\left(\frac{1+r}{2}\right)^{a_w}\cdot w(2(1-r)) \le w(1-r^2) \le \left(\frac{2}{1+r}\right)^{b_w}\cdot w(2(1-r)) .$$

Поскольку при $b_w \in (0;1)$ выполнено $\left(\frac{2}{1+r}\right)^{b_w} \le 2^{b_w}$, при $a_w>0$ $\left(\frac{1+r}{2}\right)^{a_w} \ge \frac{1}{2^{a_w}}$, а при $-1<a_w\le 0$ имеет место неравенство $\left(\frac{1+r}{2}\right)^{a_w} \ge 1$, то получаем оценку

$$c_1 w(1-r^2) \le w(2(1-r)) \le c_2 w(1-r^2) ,$$

где $c_1 = 2^{-b_w}$, $c_2 = \begin{cases} 2^{a_w} & \text{при } a_w > 0, \\ 1 & \text{при } -1 < a_w \le 0. \end{cases}$

Применяя лемму 2 для функции $w \in S$ при $t_1=r$, $t_2=2r$, получим неравенство

$$2^{-a_w}w(2r) \le w(r) \le 2^{b_w}w(2r) ,$$

используя которое, можем записать

$$c_1' w(1-r^2) \le w(1-r) \le c_2' w(1-r^2).$$

Следовательно, указанные условия эквивалентны.

Оценим снизу интеграл $I=\int_0^1 w\left(1-r^2\right)T(f,r)dr$. Для функции f вида (7), используя соотношение (10), получим

$$T(f,r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k^{\gamma+1}\frac{\operatorname{Re}(1-r_k re^{-i\varphi})^{\gamma+1}}{|1-r_k re^{i\varphi}|^{2(\gamma+1)}}\right\}^{+} d\varphi .$$

Рассмотрим круг $K=\left\{z:\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\right\}$. Тогда в силу неотрицательности подынтегральной функции будем иметь

$$I \ge \frac{1}{2\pi}\iint_K w(1-r^2)\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k^{\gamma+1}\frac{\operatorname{Re}(1-r_k re^{-i\varphi})^{\gamma+1}}{|1-r_k re^{i\varphi}|^{2(\gamma+1)}}\right\}^{+} r dr d\varphi . \qquad (18)$$

Если $1-z=re^{i\theta}$ ($z=re^{i\varphi}$), то K будет совпадать с множеством тех $re^{i\theta}$, для которых $r<\cos\theta,\ |\theta|<\frac{\pi}{2}$. Действительно, по предположению $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$. Значит, $\left|z-1+1-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$, то есть $\left|\frac{1}{2}-re^{i\theta}\right|^2<\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{4}-r\cos\theta+r^2<\frac{1}{4}$. Отсюда следует неравенство $r(r-\cos\theta)<0$, которое выполнено при $r<\cos\theta,\ |\theta|<\frac{\pi}{2}$.

Производя замену переменной в правой части неравенства (18), получим

$$I \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} w\left(1-\left|1-re^{i\theta}\right|^2\right)\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k^{\gamma+1}\frac{\operatorname{Re}(1-r_k+r_k re^{-i\theta})^{\gamma+1}}{|1-r_k+r_k re^{i\theta}|^{2(\gamma+1)}}\right\}^{+} r\,dr\,d\theta \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4(\gamma+1)}}^{\frac{\pi}{4(\gamma+1)}}\int_0^{\cos\theta} w\left(1-\left|1-re^{i\theta}\right|^2\right)\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k^{\gamma+1}\frac{\operatorname{Re}(1-r_k+r_k re^{-i\theta})^{\gamma+1}}{|1-r_k+r_k re^{i\theta}|^{2(\gamma+1)}}\right\}^{+} r\,dr\,d\theta . \qquad (19)$$

Так как

$$\operatorname{Re}(1-r_k+r_k re^{-i\theta})^{\gamma+1}=(r_k r)^{\gamma+1}\operatorname{Re}\left(\frac{1-r_k}{r_k r}+e^{-i\theta}\right)^{\gamma+1},$$

то используя лемму 4, получим

$$\operatorname{Re}(1-r_k+r_k re^{-i\theta})^{\gamma+1}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(r_k r)^{\gamma+1} \qquad (20)$$

при $|\theta|<\frac{\pi}{4(\gamma+1)},\ \gamma>0$.

Далее

$$1-|1-re^{i\theta}|^2=1-\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)=r(2\cos\theta-r).$$

Поскольку $r<\cos\theta$ и при $|\theta|<\frac{\pi}{4(\gamma+1)},\ \gamma>0$ выполнено $\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$1 - |1 - re^{iq}|^2 > r\cos q \geq \frac{\sqrt{2}}{2} r .$$

Применим лемму 2 при $t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} r$, $t_2 = 1 - |1 - re^{iq}|^2 = r(2\cos q - r)$:

$$w\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\right) \leq \left(\sqrt{2}(2\cos q - r)\right)^{b_w} w\left(1 - \left|1 - re^{iq}\right|^2\right).$$

Т. к. при $b_w \in (0;1)$ выполнено $\left(\sqrt{2}(2\cos q - r)\right)^{b_w} \leq \left(2\sqrt{2}\cos q\right)^{b_w} \leq \left(2\sqrt{2}\right)^{b_w}$, то

$$w\left(1 - \left|1 - re^{iq}\right|^2\right) \geq \left(2\sqrt{2}\right)^{-b_w} \cdot w\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\right).$$

Снова используя лемму 2 при $t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} r$, $t_2 = r$, получим

$$w\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\right) \geq \left(\sqrt{2}\right)^{-a_w} \cdot w(r).$$

Учитывая вышеизложенное, можем записать

$$w\left(1 - \left|1 - re^{iq}\right|^2\right) \geq cw(r). \qquad (21)$$

Подставляя оценки (20) и (21) в соотношение (19), будем иметь

$$I \geq \frac{c}{2p} \int_{-\frac{p}{4(g+1)}}^{\frac{p}{4(g+1)}} \int_0^{\cos q} w(r) r^{g+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k r_k^{\,2(g+1)}}{|1 - r_k + r_k r e^{iq}|^{2(g+1)}} \right\} r\,dr\,dq .$$

Поскольку

$$|1 - r_k + r_k r e^{iq}|^2 = (1 - r_k)^2 + 2 r_k r (1 - r_k)\cos q + r_k^{\,2} r^2 \leq$$
$$\leq (1 - r_k)^2 + 2 r_k r (1 - r_k) + r_k^{\,2} r^2 = (1 - r_k + r_k r)^2 ,$$

то

$$I \geq \frac{c}{p} \int_0^{\frac{p}{4(g+1)}} \int_0^{\cos q} w(r) r^{g+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k r_k^{\,2(g+1)}}{(1 - r_k + r_k r)^{2(g+1)}} \right\} r\,dr\,dq \geq$$

$$\geq \frac{c}{4(g+1)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{r_k - 1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{w(r) r^{g+2}}{(r_k - 1 + r)^{2(g+1)}} dr \geq \frac{c}{2^{2(g+2)}(g+1)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{r_k - 1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{w(r)}{r^g} dr . \qquad (22)$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_{r_k - 1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{w(r)}{r^g}\left(1 + \frac{e(r)}{g - 1}\right) dr = \frac{1}{g - 1}\left(\frac{w(r_k - 1)}{(r_k - 1)^{g-1}} - w\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^{g-1}\right).$$

Используя неравенство $e(t) \leq b_w$, получим

$$\left(1 + \frac{b_w}{g - 1}\right) \int_{r_k - 1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{w(r)}{r^g} dr \geq \frac{1}{g - 1}\left(\frac{w(r_k - 1)}{(r_k - 1)^{g-1}} - C\right).$$

Отсюда, так как $b_w \in (0;1)$, $g > 1 + a_w$ и, значит, $g - 1 + b_w > 0$, следует

$$\int_{r_k-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{w(r)}{r^g} dr \geq \frac{1}{g-1+b_w}\left(\frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{g-1}} - C\right).$$

Подставляя эту оценку в (22), будем иметь

$$I \geq C(g, b_w) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{g-1}} - C\right).$$

Следовательно, если функция $f(z)$ принадлежит классу S_w, то выполнено условие (9).

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, получим достаточное условие принадлежности функции рассматриваемого вида классу S_w^p и при $p\in(0;1)$.

Теорема 2. Пусть $w\in S$, $b_w\in(0;1)$, $p\in(0;1)$. Если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{gp-1}} < +\infty, \tag{23}$$

где c_k - комплексные числа (k=1,2,...), то функция $f(z)$ вида (7) при $g > \frac{1+a_w}{p}$ принадлежит классу S_w^p.

Доказательство.

Используя оценку

$$T(f, r) \leq c_1(g) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{(r_k - r)^g},$$

установленную для функции вида (7) при доказательстве теоремы 1, и неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p, \quad a_k \geq 0,\ k=1,2,...,$$

верное при $0<p<1$, получим

$$I = \int_0^1 w(1-r) T^p(f, r) dr \leq C_1(g, p) \int_0^1 w(1-r) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^p}{(r_k - r)^{gp}} dr = C_1(g, p) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \int_0^1 \frac{w(1-r)}{(r_k - r)^{gp}} dr.$$

После замены переменной будем иметь

$$I \leq C_1(g, p) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \int_0^1 \frac{w(t)}{(r_k - 1 + t)^{gp}} dt.$$

Применяя к интегралу в правой части оценку (12), при $g > \frac{1+a_w}{p}$ получим

$$I \leq C(a_w, b_w, g, p) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \frac{w(r_k-1)}{(r_k-1)^{gp-1}}.$$

Следовательно, при выполнении условия (23) и $g > \frac{1+a_w}{p}$ функция f принадлежит классу S_w^p.

We obtain necessary and sufficient conditions for membership of analytic functions of the ad hoc type of class S_w^p in the case p =1 and sufficient condition for the case 0 <p<1.

The key words: *analytic functions, unit disk, characteristic of Nevanlinna, class* S_w^p.

Список литературы

1. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.: ГИТТЛ. 1941.

2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: «Наука». 1985. С. 141.
3. Шамоян Ф.А. Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста// Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. 13. № 5-6. С. 405-422.
4. Шеремета М.Н. О некоторых классах аналитических в круге функций// Изв. ВУЗов, математика. 1989. № 5. С. 64-67.

Об авторе

И.С. Кипень - канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, e-mail: kipen69@mail.ru.

УДК 512.542

О МАКСИМАЛЬНЫХ τ-ЗАМКНУТЫХ ПОДФОРМАЦИЯХ τ-ЗАМКНУТЫХ ФОРМАЦИЙ

М.А. Корпачева, М.М. Сорокина

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Отображение θ, выделяющее в каждой группе $G\in\mathfrak{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором (подгрупповым функтором на $\mathfrak{X}$), если $(\theta(G))^{\varphi}=\theta(G^{\varphi})$ для любого изоморфизма φ каждой группы $G\in\mathfrak{X}$. Пусть τ - $\mathfrak{X}$-подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если из $G\in\mathfrak{F}$ всегда следует, что $\tau(G)\subseteq\mathfrak{F}$. В настоящей работе исследуется вопрос существования единственной максимальной τ-замкнутой ω-веерной (Ω-расслоенной) подформации в τ-замкнутой ω-веерной (Ω-расслоенной) формации конечных групп.
Ключевые слова: *конечная группа, формация групп, τ-замкнутая формация, ω-веерная формация, Ω-расслоенная формация, подгрупповой функтор.*

Многие важные исследования в теории классов конечных групп связаны с максимальными θ-подклассами изучаемых классов, где θ – некоторая непустая совокупность классов групп. Так, например, А.Н. Скибой в монографии [1] результаты о максимальных τ-замкнутых локальных подформациях τ-замкнутой локальной формации, где τ - регулярный подгрупповой функтор, широко использовались при исследовании строения τ-замкнутых локальных критических формаций, при изучении свойств решетки всех τ-замкнутых локальных формаций и т.д. Данная работа посвящена исследованию вопроса существования единственной максимальной τ-замкнутой ω-веерной (Ω-расслоенной) подформации в τ-замкнутой ω-веерной (Ω-расслоенной) формации.

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения, не приведенные в работе, можно найти в [2-6]. Приведем лишь некоторые из определений и обозначений.

Пусть $\mathbb{P}$ - множество всех простых чисел, ω - непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $\mathfrak{G}_{\omega}$ - класс всех ω-групп, то есть таких групп G, что $\pi(G)\subseteq\omega$; $\mathfrak{G}_{q'}$ - класс всех q'-групп, где $q'=\mathbb{P}\setminus\{q\}$; $\mathfrak{S}_{cp}$ - класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен, $F_{cp}(G)=G_{\mathfrak{S}_{cp}}$, $O_{\omega}(G)=G_{\mathfrak{G}_{\omega}}$ - $\mathfrak{S}_{cp}$-радикал и $\mathfrak{G}_{\omega}$-радикал группы G соответственно. Функции $f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{$формации групп$\}$, g: $\mathbb{P}\to\{$формации групп$\}$, $\delta:\mathbb{P}\to\{$непустые формации Фиттинга$\}$ называются соответственно ωF-функцией, $\mathbb{P}F$-функцией и $\mathbb{P}FR$-функцией. Формация $\mathfrak{F}=(G$: $G/O_{\omega}(G)\in f(\omega')$, $G/G_{\delta(p)}\in f(p)$ для всех $p\in\pi(G)\cap\omega)$ называется ω-веерной формацией с

ω-спутником f и направлением δ и обозначается $\mathfrak{F}=\omega F(f,\delta)$; формация $\mathfrak{F}=(G\colon G/G_{\delta(p)}\in g(p)$ для всех $p\in\pi(G))$ называется веерной формацией со спутником g и направлением δ и обозначается $\mathfrak{F}=\mathbb{P}F(g,\delta)$ [3]. ω-центральной (центральной) формацией называется ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_3, где $\delta_3(p)=\mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p\in\mathbb{P}$ [4]; ω-полной (полной) формацией называется ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_0, где $\delta_0(p)=\mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p\in\mathbb{P}$; через δ_1 обозначается направление ω-локальной формации [3]. Направление δ ω-веерной (веерной) формации называется bp-направлением, если δ является b-направлением, т.е. $\delta(q)\mathfrak{N}_q=\delta(q)$ для любого $q\in\mathbb{P}$; и δ является p-направлением, т.е. $\delta(q)=\mathfrak{G}_{q'}\delta(q)$ для любого $q\in\mathbb{P}$ [4].

Пусть τ - отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп. Говорят, что τ - подгрупповой функтор, если $(\tau(G))^{\varphi}=\tau(G^{\varphi})$ для любого изоморфизма φ каждой группы G. Подгрупповой функтор τ называется регулярным, если выполняются следующие два условия:

1) из того, что N - нормальная подгруппа группы G и $M\in\tau(G)$, следует $MN/N\in\tau(G/N)$;

2) из $M/N\in\tau(G/N)$ следует $M\in\tau(G)$ (см., например, [2]).

Пусть δ – некоторая $\mathbb{P}FR$-функция. Подгрупповой функтор τ назовем δ-радикальным, если для всякой τ-подгруппы N любой группы G (т.е. для всякой $N\in\tau(G)$) выполняется равенство $G_{\delta(p)}\cap N=N_{\delta(p)}$ для всех $p\in\mathbb{P}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если из $G\in\mathfrak{F}$ всегда следует, что $\tau(G)\subseteq\mathfrak{F}$ [1]. ω-спутник (спутник) f ω-веерной (веерной) формации назовем τ-замкнутым, если для любого $p\in\omega\cup\{\omega'\}$ (для любого $p\in\mathbb{P}$) формация $f(p)$ является τ-замкнутой.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *-* *ω-веерная формация с bp-направлением δ, $\delta\leq\delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ - τ-замкнутая формация. Поскольку δ – такое bp-направление, что $\delta\leq\delta_3$, то, согласно теореме 6 [4], $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ω-спутник h, причем $h(p)=\mathfrak{N}_p h(p)$ для всех $p\in\omega$ и $h(\omega')=\mathfrak{F}$. Поэтому формация $h(\omega')$ является τ-замкнутой. Покажем, что $h(p)$ - τ-замкнутая формация для всех $p\in\omega$. Предположим, что найдется такое $p\in\omega$, что формация $h(p)$ не является τ-замкнутой. Пусть G - группа наименьшего порядка из $h(p)$, обладающая такой подгруппой N, что $N\in\tau(G)$, $N\notin h(p)$. Тогда $G\neq1$. Если G - не монолитическая группа, то найдутся две различные минимальные нормальные подгруппы R и M группы G, причем, ввиду $G\in h(p)$, имеем $G/R\in h(p)$ и $G/M\in h(p)$. Поскольку τ - регулярный подгрупповой функтор, то $NR/R\in\tau(G/R)$. Тогда по индукции $NR/R\in h(p)$, и значит, $N/N\cap R\in h(p)$. Аналогично, $NM/M\cong N/N\cap M\in h(p)$. Следовательно, $N/(N\cap R\cap M)\cong N\in h(p)$. Противоречие. Поэтому G - монолитическая группа. Пусть M - монолит группы G. Предположим, что $O_p(G)\neq1$. Тогда $M\subseteq O_p(G)$. Как показано выше, $N/N\cap M\in h(p)$. Так как $N\cap M$ - p-группа, то $N\in\mathfrak{N}_p h(p)=h(p)$. Противоречие. Следовательно, $O_p(G)=1$. Согласно лемме 18.8 [7], существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль K. Пусть $T=[K]G$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K=C_T(K)$. Покажем, что $T_{\delta(p)}=K$. Поскольку δ является b-направлением, то $K\in\mathfrak{N}_p\subseteq\delta(p)\mathfrak{N}_p=\delta(p)$ и $K\subseteq T_{\delta(p)}$. С другой стороны, $\delta_3(p)=\mathfrak{S}_{cp}$ и $T_{\delta_3(p)}=F_{cp}(T)\subseteq C_T(K)=K$. Так как $\delta\leq\delta_3$, то $T_{\delta(p)}\subseteq T_{\delta_3(p)}=K$. Следовательно, $T_{\delta(p)}=K$. Из $T/K\cong G\in h(p)$ получаем $T\in\mathfrak{N}_p h(p)=h(p)\subseteq\mathfrak{F}$, и, ввиду τ-замкнутости формации $\mathfrak{F}$, имеем $\tau(T)\subseteq\mathfrak{F}$.

Покажем, что $NK\in\tau(T)$. Так как $T/K\cong G$, то существует изоморфизм $\varphi: G \to T/K$, при этом, $N^{\varphi}=NK/K$. Поскольку τ - подгрупповой функтор и $N\in\tau(G)$, то $NK/K=N^{\varphi}\in(\tau(G))^{\varphi}=\tau(G^{\varphi})=\tau(T/K)$. Так как τ - регулярный подгрупповой функтор и $NK/K\in\tau(T/K)$, то $NK\in\tau(T)$, и значит, $NK\in\mathfrak{F}$. Поэтому $NK/(NK)_{\delta(p)}\in h(p)$. Поскольку τ - δ-радикальный подгрупповой функтор и $NK\in\tau(T)$, то $(NK)_{\delta(p)}=T_{\delta(p)}\cap NK=K\cap NK=K$ и $NK/(NK)_{\delta(p)}=NK/K\cong N\in h(p)$. Противоречие. Таким образом, формация $h(p)$ является τ-замкнутой для любого $p\in\omega\cup\{\omega'\}$, и значит, h - τ-замкнутый ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Пусть f - τ-замкнутый ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, $G\in\mathfrak{F}$ и $N\in\tau(G)$. Покажем, что $N\in\mathfrak{F}$. Так как $G/G_{\delta(p)}\in f(p)$ для любого $p\in\omega\cap\pi(G)$, то из $NG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)}\in \tau(G/G_{\delta(p)})$ и τ-замкнутости формации $f(p)$ следует, что $NG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)}\cong N/(N\cap G_{\delta(p)})\in f(p)$. Так как подгрупповой функтор τ является δ-радикальным, то $N/(N\cap G_{\delta(p)})=N/N_{\delta(p)}\in f(p)$ для любого $p\in\omega\cap\pi(N)$. Далее, из $G/O_{\omega}(G)\in f(\omega')$, $NO_{\omega}(G)/O_{\omega}(G)\in\tau(G/O_{\omega}(G))$ и τ-замкнутости формации $f(\omega')$ следует $NO_{\omega}(G)/O_{\omega}(G)\cong N/(N\cap O_{\omega}(G))\in f(\omega')$. Так как $N\cap O_{\omega}(G)\subseteq O_{\omega}(N)$, то $N/O_{\omega}(N)\cong(N/N\cap O_{\omega}(G))/(O_{\omega}(N)/N\cap O_{\omega}(G))\in f(\omega')$. Таким образом, по определению ω-веерной формации, $N\in\mathfrak{F}$, и значит, формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой. Лемма доказана.

Через $\mathfrak{F}=\omega\tau F(\mathfrak{X},\delta)$ ($\mathfrak{F}=\tau F(\mathfrak{X},\delta)$) обозначается τ-замкнутая ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, порожденная классом групп $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{F}=\omega F_{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$ ($\mathfrak{F}=F_{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$) - ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, обладающая хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником (спутником), порожденная классом групп $\mathfrak{X}$. Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 5 [3].

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ - непустой класс групп, δ - такое направление ω-веерной формации, что $\delta_0\leq\delta$, τ - регулярный подгрупповой функтор. Тогда формация $\mathfrak{F}=\omega F_{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$ обладает единственным минимальным τ-замкнутым ω-спутником f таким, что $f(\omega')=\tau form(G/O_{\omega}(G) : G\in\mathfrak{X})$, $f(p)=\tau form(G/G_{\delta(p)}: G\in\mathfrak{X})$ для всех $p\in\omega\cap\pi(\mathfrak{X})$ и $f(p)=\varnothing$, если $p\in\omega\setminus\pi(\mathfrak{X})$.*

Пусть τ - подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация, $\mathfrak{M}$ – τ-замкнутая подформация из $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{M}$ называется максимальной τ-замкнутой подформацией формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{F}$ и для любой τ-замкнутой подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ из включений $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}$ следует равенство $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}$. Аналогично определяется максимальная τ-замкнутая ω-веерная (веерная) подформация с направлением δ τ-замкнутой ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}$ с направлением δ. Формационно критическая группа G называется τ-базисной группой ($\omega\tau\delta$-базисной группой, $\tau\delta$-базисной группой), если формация $\tau form G$ (соответственно формация $\omega\tau F(G,\delta)$, формация $\tau F(G,\delta)$) содержит единственную максимальную τ-замкнутую подформацию (единственную максимальную τ-замкнутую ω-веерную (соответственно веерную) подформацию с направлением δ).

Теорема 1. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации такое, что $\delta\leq\delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $G=[P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P=C_G(P)$, где P – p-группа, $p\in\omega$, H – τ-базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная τ-замкнутая подформация из $\tau form H$. Тогда G является $\omega\tau\delta$-базисной группой, причем максимальная τ-замкнутая ω-веерная подформация с направлением δ из $\omega\tau F(G,\delta)$ обладает таким τ-замкнутым ω-спутником h, что $h(\omega')=\tau form(G/O_{\omega}(G))$, $h(q)=\tau form(G/G_{\delta(q)})$ для всех $q\in(\pi(G)\cap\omega)\setminus\{p\}$, $h(p)=\mathfrak{M}$ и $h(q)=\varnothing$, если $q\in\omega\setminus\pi(G)$.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathfrak{F}=\omega\tau F(G,\delta)$. Согласно лемме 1 $\mathfrak{F}=\omega F_{\tau}(G,\delta)$, и значит, по лемме 2 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным τ-замкнутым ω-спутником f, причем $f(\omega')=\tau form(G/O_{\omega}(G))$, $f(q)=\varnothing$, для всех $q\in\omega\setminus\pi(G)$, $f(q)=\tau form(G/G_{\delta(q)})$ для любого $q\in\pi(G)\cap\omega$. Пусть h – такая ωF-функция, что $h(\omega')=\tau form(G/O_{\omega}(G))$, $h(q)=\tau form(G/G_{\delta(q)})$ для всех

$q\in(\pi(G)\cap\omega)\backslash\{p\}$, $h(p)$=M и $h(q)=\varnothing$, если $q\in\omega\backslash\pi(G)$. Тогда $h(\omega')=f(\omega')$ и $h(q)=f(q)$ для любого $q\in\omega\backslash\{p\}$ (1). Покажем, что $h(p)\subset f(p)$. Ввиду условия, достаточно проверить, что $f(p)=\tau formH$. Так как $\delta\leq\delta_3$, то $G_{\delta(p)}\subseteq G_{\delta_3(p)}\subseteq C_G(P)=P$. С другой стороны, поскольку δ – b-направление ω-веерной формации, то $\delta(p)\mathrm{N}_p=\delta(p)$, и значит, $P\in\delta(p)$. Следовательно, $G_{\delta(p)}=P$ и $f(p)=\tau form(G/G_{\delta(p)})=\tau form(G/P)=\tau formH$. По условию M – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $\tau formH$. Поэтому $h(p)$=M$\subset\tau formH=f(p)$. Тем самым установлено, что $h<f$. Пусть H=$\omega F(h,\delta)$. Тогда из $h<f$ получаем H$\subset$F. Отметим, что, ввиду леммы 1, формация H является τ-замкнутой.

Пусть B – собственная τ-замкнутая ω-веерная подформация с направлением δ из F. Покажем, что B$\subseteq$H. Пусть b - минимальный τ-замкнутый ω-спутник формации B. Проверим, что $b\leq h$. Так как $b\leq f$, то, ввиду (1), $b(\omega')\subseteq h(\omega')$ и $b(q)\subseteq h(q)$ для любого $q\in\omega\backslash\{p\}$. Допустим, что $b(p)=f(p)$. Тогда $G/G_{\delta(p)}=G/P\in b(p)$. Поскольку δ – bp-направление ω-веерной формации, то $\delta_1\leq\delta$ и по лемме 7 [4] $G\in\mathrm{N}_p b(p)\subseteq$B. Это означает, что F$\subseteq$B. Получили противоречие. Следовательно, $b(p)\subset f(p)$. Так как $f(p)=\tau formH$, то $b(p)\subseteq$M$=h(p)$. Таким образом, $b\leq h$ и поэтому B$\subseteq$H. Тем самым доказано, что H – единственная максимальная τ-замкнутая ω-веерная подформация с направлением δ из F.

Согласно теореме 53.44 [8], G – критическая, а значит, и формационно критическая группа. Следовательно, G является $\omega\tau\delta$-базисной группой. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть δ – bp-направление веерной формации такое, что $\delta\leq\delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, G=[P]H – монолитическая группа с монолитом $P=C_G(P)$, где P – p-группа, H – τ-базисная группа и* M *– максимальная τ-замкнутая подформация из $\tau formH$. Тогда G является $\tau\delta$-базисной группой, причем максимальная τ-замкнутая веерная подформация с направлением δ из $\tau F(G,\delta)$ обладает таким τ-замкнутым спутником h, что $h(q)=\tau form(G/G_{\delta(q)})$ для всех $q\in\pi(G)\backslash\{p\}$, $h(p)$=M и $h(q)=\varnothing$, если $q\in\mathbb{P}\backslash\pi(G)$.*

Пусть I - класс всех простых групп, Ω - непустой подкласс класса I, G_Ω - класс всех Ω-групп (полагают, что $1\in\mathrm{G}_\Omega$), то есть таких групп G, что $K(G)\subseteq\Omega$, где $K(G)$ – класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $O_\Omega(G)=G_{\mathrm{G}_\Omega}$. Пусть $A\in$I. Тогда A'=I$\backslash(A)$; S_{cA} - класс всех групп, у которых каждый главный A-фактор централен, $F_{cA}(G)=G_{\mathrm{S}cA}$, Функции f: $\Omega\cup\{\Omega'\}$ $\rightarrow${формации групп}, g:$\rightarrow${формации групп}, φ: I $\rightarrow${непустые формации Фиттинга}, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называются соответственно ΩF-функцией, F-функцией и FR-функцией. Формация F=$(G$: $G/O_\Omega(G)\in f(\Omega')$, $G/G_{\varphi(A)}\in f(A)$ для всех $A\in K(G)\cap\Omega)$ называется Ω-расслоенной формацией с Ω-спутником f и направлением φ и обозначается F=$\Omega F(f,\varphi)$; формация F=$(G$:$G/G_{\varphi(A)}\in g(A)$ для всех $A\in K(G))$ называется расслоенной формацией со спутником g и направлением φ и обозначается F=$F(g,\varphi)$ [5]. Ω-композиционной (композиционной) формацией называется Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ_3, где $\varphi_3(A)$=S_{cA} для любого $A\in$I; Ω-свободной (свободной) формацией называется Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ_0, где $\varphi_0(A)$=$\mathrm{G}_{A'}$ для любого $A\in$I [5]. Направление φ Ω-расслоенной (расслоенной) формации называется br-направлением, если φ является b-направлением, т.е. $\varphi(A)\mathrm{G}_A=\varphi(A)$ для любой абелевой группы $A\in$I; и φ является r-направлением, т.е. $\varphi(A)$=$\mathrm{G}_{A'}\varphi(A)$ для любого $A\in$I [6].

Пусть φ – некоторая FR-функция. Подгрупповой функтор τ назовем $\Omega\varphi$-радикальным, если для всякой τ-подгруппы N любой группы G справедливо $O_\Omega(G)\cap N=O_\Omega(N)$ и

$G_{\varphi(A)}\cap N=N_{\varphi(A)}$ для всех $A\in\mathrm{I}$. Подгрупповой функтор τ назовем замкнутым относительно композиционных факторов, если $K(\tau(G))\subseteq K(G)$, где $K(\tau(G))=\cup_{H\in\tau(G)}K(H)$. Ω-спутник (спутник) f Ω-расслоенной (расслоенной) формации назовем τ-замкнутым, если для любого $A\in\Omega\cup\{\Omega'\}$ (для любого $A\in\mathrm{I}$) формация $f(A)$ является τ-замкнутой.

Лемма 3 (теорема 1 [9]). *Пусть* F *-* *Ω-расслоенная формация с br-направлением φ, $\varphi\leq\varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов. Формация F является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда F обладает хотя бы одним τ-замкнутым Ω-спутником.*

Аналогично, как и для веерных формаций, $\mathrm{F}=\Omega\tau F(\mathrm{X},\varphi)$ $(\mathrm{F}=\tau F(\mathrm{X},\varphi))$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ, порожденная классом групп X; $\mathrm{F}=\Omega F_\tau(\mathrm{X},\varphi)$ $(\mathrm{F}=F_\tau(\mathrm{X},\varphi))$ - Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ, обладающая хотя бы одним τ-замкнутым Ω-спутником (спутником), порожденная классом групп X.

Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 5 [5].

Лемма 4. *Пусть X - непустой класс групп, φ - такое направление Ω-расслоенной формации, что $\varphi_0\leq\varphi$, τ - регулярный подгрупповой функтор. Тогда формация $\mathrm{F}=\Omega F_\tau(\mathrm{X},\varphi)$ обладает единственным минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f таким, что $f(\Omega')=\tau form(G/O_\Omega(G):G\in\mathrm{X})$, $f(A)=\tau form(G/G_{\varphi(A)}: G\in\mathrm{X})$ для всех $A\in\Omega\cap K(\mathrm{X})$ и $f(A)=\varnothing$, если $A\in\Omega\backslash K(\mathrm{X})$.*

Аналогично, как и выше, M - максимальная τ-замкнутая Ω-расслоенная подформация с направлением φ τ-замкнутой Ω-расслоенной формации F с направлением φ, если $\mathrm{M}\subset\mathrm{F}$ и для любой τ-замкнутой Ω-расслоенной подформации H с направлением φ из F из включений $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{H}\subset\mathrm{F}$ следует равенство $\mathrm{M}=\mathrm{H}$; $\Omega\tau\varphi$-базисная ($\tau\varphi$-базисная) группа – такая формационно критическая группа G, что формация $\Omega\tau F(G,\varphi)$ (формация $\tau F(G,\varphi)$) содержит единственную максимальную τ-замкнутую Ω-расслоенную (расслоенную) подформацию с направлением φ.

Теорема 2. *Пусть φ – br-направление Ω-расслоенной формации такое, что $\varphi\leq\varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $G=[P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P=C_G(P)$, где P – p-группа, $Z_p\in\Omega$, H – τ-базисная группа и M – максимальная τ-замкнутая подформация из $\tau formH$. Тогда G является $\Omega\tau\varphi$-базисной группой, причем максимальная τ-замкнутая Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\Omega\tau F(G,\varphi)$ обладает таким τ-замкнутым Ω-спутником h, что $h(\Omega')=\tau form(G/O_\Omega(G))$, $h(A)=\tau form(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A\in(K(G)\cap\Omega)\backslash(Z_p)$, $h(Z_p)=\mathrm{M}$ и $h(A)=\varnothing$, если $A\in\Omega\backslash K(G)$.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathrm{F}=\Omega\tau F(G,\varphi)$. Согласно лемме 3 $\mathrm{F}=\Omega F_\tau(G,\varphi)$, и значит, по лемме 4 формация F обладает единственным минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f, причем $f(\Omega')=\tau form(G/O_\Omega(G))$, $f(A)=\varnothing$, для всех $A\in\Omega\backslash K(G)$, $f(A)=\tau form(G/G_{\varphi(A)})$ для любого $A\in K(G)\cap\Omega$. Пусть h – ΩF-функция, описанная в заключении теоремы. Тогда $h(\Omega')=f(\Omega')$ и $h(A)=f(A)$ для любого $A\in\Omega\backslash(Z_p)$. Покажем, что $h(Z_p)\subset f(Z_p)$. Так как $\varphi\leq\varphi_3$, то $G_{\varphi(Zp)}\subseteq G_{\varphi_3(Zp)}\subseteq C_G(P)=P$. С другой стороны, поскольку φ – b-направление Ω-расслоенной формации, то $\varphi(Z_p)\mathrm{N}_p=\varphi(Z_p)$, и значит, $P\in\varphi(Z_p)$. Следовательно, $G_{\varphi(Zp)}=P$ и $f(Z_p)=\tau form(G/G_{\varphi(Zp)})=\tau formH$. По условию M – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $\tau formH$. Поэтому $h(Z_p)=\mathrm{M}\subset\tau formH=f(Z_p)$. Тем самым установлено, что $h<f$. Пусть $\mathrm{H}=\Omega F(h,\varphi)$. Тогда из $h<f$ получаем $\mathrm{H}\subset\mathrm{F}$. Отметим, что, ввиду леммы 3, формация H является τ-замкнутой.

Пусть B – собственная τ-замкнутая Ω-расслоенная подформация с направлением φ из F, b – ее минимальный τ-замкнутый Ω-спутник. Так как $b\leq f$, то $b(\Omega')\subseteq h(\Omega')$ и $b(A)\subseteq h(A)$ для любого $A\in\Omega\backslash(Z_p)$. Допустим, что $b(Z_p)=f(Z_p)$. Тогда $G/G_{\varphi(Zp)}=G/P\in b(Z_p)$. Поскольку φ – br-направление Ω-расслоенной формации, то $\varphi_1\leq\varphi$ и по следствию 3 [6] $G\in \mathrm{N}_p b(Z_p)\subseteq\mathrm{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(Z_p)\subset f(Z_p)$, и значит, $b(Z_p)\subseteq\mathrm{M}=h(Z_p)$. Таким образом, $b\leq h$ и поэтому $\mathrm{B}\subseteq\mathrm{H}$. Тем самым доказано, что H – единственная максимальная τ-замкнутая Ω-расслоенная подформация с направлением φ из F. Ввиду теоремы 53.44 [8], G – формационно критическая группа. Следовательно, группа G является $\Omega\tau\varphi$-базисной. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть φ – br-направление расслоенной формации такое, что $\varphi\leq\varphi_3$, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $G=[P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P=C_G(P)$, где P – p-группа, H – τ-базисная группа и M – максимальная τ-замкнутая подформация из $\tau formH$. Тогда G является $\tau\varphi$-базисной группой, причем максимальная τ-замкнутая расслоенная подформация с направлением φ из $\tau F(G,\varphi)$ обладает таким τ-замкнутым спутником h, что $h(A)=\tau form(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A\in K(G)\backslash(Z_p)$, $h(Z_p)=\mathrm{M}$ и $h(A)=\varnothing$, если $A\in\mathrm{I}\backslash K(G)$.*

Only finite groups are considered. Let X be nonempty class of groups. A function θ mapping each group G from X onto a certain nonempty system $\theta(G)$ of its subgroups is called a subgroup X-functor (or else a subgroup functor on X), if $(\theta(G))^{\varphi}=\theta(G^{\varphi})$ for any isomorphism φ of every group G from X. Let τ be a subgroup X-functor. A formation F is called τ-closed if from $G\in\mathrm{F}$ it follows that $\tau(G)\subseteq\mathrm{F}$. In this paper we study maximal τ-closed ω-fibered (Ω-foliated) subformations of τ-closed ω-fibered (Ω-foliated) formations of finite groups.

The кey words: *a finite group, a formation of groups, a τ-closed formation, a ω-fibered formation, a Ω-foliated formation, a subgroup functor.*

Список литературы

1. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука. 1997. С. 240.
2. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука. 2003. С. 254.
3. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71. Вып. 1. С. 43 - 60.
4. Ведерников В.А. О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Укр. матем. конгресс. Алг. і теор. чисел. Праці. Киев. 2002. С. 36 - 45.
5. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13. Вып. 3. С. 125 - 144.
6. Vedernikov V.A. Maximal Satellites of Ω-Foliated Formations and Fitting Classes. Proc. of the Steklov Institute of Math. Suppl. 2. 2001. P. 217 - 233.
7. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: «Наука». 1989. С. 253.
8. Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир. 1969. С. 264.
9. Корпачева М.А., Сорокина М.М. О Ω-расслоенных τ-замкнутых формациях конечных групп // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. 2008. С. 137 - 138.

Об авторах

М.А. Корпачева – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, mmsorokina@yandex.ru

М.М. Сорокина – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, sirserg3000@mail.ru.

УДК 512.542

О ДВУХ КЛАССАХ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С ОБОБЩЕННО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ВТОРЫМИ И ТРЕТЬИМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Ю.В. Луценко

Работа посвящена исследованию групп Шмидта и групп Белоногова, у которых любые две вторые или любые две третьи максимальные подгруппы (обобщенно) перестановочны.

Ключевые слова: *максимальная подгруппа, вторая максимальная подгруппа, третья максимальная подгруппа, группа Шмидта, группа Белоногова, X-перестановочная подгруппа, разрешимая группа, примитивная подгруппа, нормальная подгруппа.*

Все группы в данной статье являются конечными. Напомним, что подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. Например, в работе [1] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [2, 3] получены характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. Еще один подход к изучению групп с заданными 2-максимальными подгруппами разрабатывался в работах [4, 5], где было доказано, что группа G является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы G-перестановочны в G (напомним, что подгруппа H группы G называется X-перестановочной в G [4], где X – непустое подмножество группы G, если для любой подгруппы T из G найдется такой элемент x из X, что $HT^x=T^xH$). Отметим также, что в работах [6, 7] было получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 2-максимальными подгруппами; а также групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами. В связи с последними двумя результатами вполне естественной является задача описания групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны (см. Вопрос 3.10 в обзоре [8]). Эта задача в классе ненильпотентных групп была решена в работе [9].

Целью данной работы является изучение X-перестановочности n-максимальных подгрупп, где X – подгруппа Фиттинга основной группы, для $n = 2, 3$.

Следуя [10], будем обозначать пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы G через $\Phi^2(G)$.

Через $M_3(p)$ обозначается p-группа $\langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p} \rangle$, где p – нечетное простое число (см. [11, стр. 190]).

В дальнейшем p, q и r – попарно различные простые числа. В следующих теоремах P, Q и R обозначают некоторые силовские p-подгруппу, q-подгруппу и r-подгруппу в G соответственно.

Сформулируем в виде лемм необходимые в дальнейшем результаты работы [9].

Лемма 1 [9, лемма 2.3]. *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(2) *любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны.*

Лемма 2 [9, теорема 3.1]. *Пусть G – группа Шмидта. Тогда любые две* 3-*максимальные подгруппы группы G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*;

(2) *$G = [P]Q$, где P изоморфна либо $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка* 8;

(3) *$G = [P]Q$, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$ и $\Phi(P) = \Phi^2(P)$.*

Теорема 1. *В том и только в том случае в группе Шмидта G любые ее две* 2-*максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными, когда G – группа с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $G=[P]Q$ – группа Шмидта, в которой любые две 2-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны. Предположим, что P – неабелева группа. Тогда G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы PQ_1 *и* $P'Q$ (где Q_1 максимальна в Q). Следовательно, группа G имеет точно четыре класса 2-максимальных подгрупп, представителями которых являются группы PQ_2, P_1Q_1, $P'Q_1$ и TQ (где Q_2 максимальна в Q_1, T – некоторая максимальная подгруппа в P' и P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P). По условию, существует такой элемент f из $F(G)$, что $(P_1Q_1)(TQ)^f=(TQ)^f(P_1Q_1)$. Так как $Q_1 \le Z(G)$, $T\le Z(P)$ и TQ нильпотентна, то подгруппы Q_1 и T нормальны в G и поэтому $P_1Q^f=Q^fP_1$. Это означает, что P_1Q^f – подгруппа в группе G. Так как подгруппа $P'Q^f$ максимальна в G, $P_1Q^f \neq G$ и $P' \le P_1$, то $P' = P_1$. Следовательно, $\Phi(P) = P' = Z(P)$ – максимальная подгруппа в P и поэтому P является циклической группой порядка p, что противоречит нашему допущению о группе P. Следовательно, G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Достаточность. Напрямую следует из леммы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G – группа Шмидта. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами;*

(2) *любые две* 2-*максимальные подгруппы группы G являются $F(G)$-перестановочными;*

(3) *любые две* 2-*максимальные подгруппы группы G являются перестановочными.*

Теорема 2. *В том и только в том случае в группе Шмидта G любые ее две* 3-*максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными, когда G – группа одного из следующих типов*:

(1) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*;

(2) *$G = [P]Q$, где P изоморфна либо $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка* 8;

(3) *$G = [P]Q$ – группа Шмидта, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$* и *$\Phi(P) = \Phi^2(P)$.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, в которой любые две 3-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны.

Если P абелева, то G является группой типа (1). Предположим теперь, что P – неабелева группа. Тогда $\Phi(P) = P' = Z(P)$.

Покажем, что в группе P любые две 2-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны. Пусть P_1 и P_2 – произвольные 2-максимальные подгруппы группы P и Q_1 – максимальная подгруппа в Q. Так как Q_1 нормальна в G, то P_1Q_1 и P_2Q_1 являются 3-максимальными подгруппами в G. По условию, существует такой элемент f из $F(G)$, что $(P_1Q_1)(P_2Q_1)^f = (P_2Q_1)^f(P_1Q_1)$ и поэтому $L=Q_1P_1(P_2)^f$ является подгруппой в G. Согласно [12, VI, лемма 4.7], в группе L существует силовская p-подгруппа L_p такая, что $L_p=P_1(P_2)^f$. Это влечет $F(G)$-перестановочность подгрупп P_1 и P_2.

Допустим вначале, что $|\Phi(P)| = p$. Предположим, что существует такая 2-максимальная подгруппа T в группе P, что $\Phi(P)$ не содержится в T. Так как $P/\Phi(P)$ абелева и $T\Phi(P)/\Phi(P) \le P/\Phi(P)$, то $T \approx T\Phi(P)/\Phi(P)$ также является абелевой группой и поэтому $T\times\Phi(P)$

– абелева максимальная подгруппа в P. Тогда, по [13, теорема 5.1.9], $|P| = p^3$. В этом случае, по [11, V, теорема 5.1], P изоморфна одной из следующих групп: $M_3(p)$, $M(p)$, D или Q, где D – диэдральная группа, Q – группа кватернионов порядка 8, и

$M(p) = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1, [x,z] = [y,z] = 1, [x,y] = z \rangle$ (см. [11, стр. 203]).

Если P изоморфна $M(p)$, то $P = \Omega_1(P) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$. Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Так как в группе P любые две 2-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны и в группе P существует два класса неинвариантных несопряженных 2-максимальных подгрупп, то P – абелева группа, противоречие. Если P изоморфна D, то, по [11, V, теорема 4.3], $P = \Omega_1(P)$, что невозможно, как показано выше. Следовательно, подгруппа P изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8. Таким образом, G является группой типа (2).

Теперь допустим, что $\Phi(P)$ содержится в каждой 2-максимальной подгруппе группы P. Это влечет $\Phi(P) = \Phi^2(P)$. Если при этом $|P| = p^3$, то G снова является группой типа (2). Если же $|P| > p^3$, то G – группа типа (3).

Теперь допустим, что $|\Phi(P)| > p$. Пусть Q_1 – максимальная подгруппа в Q, K – некоторая 2-максимальная подгруппа в $\Phi(P)$ и P_2 – такая 2-максимальная подгруппа в P, что $\Phi(P) \leq P_2$. Тогда подгруппы P_2Q_1 и KQ являются 3-максимальными подгруппами в G. По условию, существует такой элемент f из $F(G)$, что $(P_2Q_1)(KQ)^f = (KQ)^f(P_2Q_1)$. Так как $Q_1 \leq Z(G)$, $K \leq Z(P)$ и KQ нильпотентна, то подгруппы Q_1 и K нормальны в G и поэтому $P_2Q^f = Q^fP_2$. Это означает, что P_2Q^f – подгруппа в группе G. Так как подгруппа $\Phi(P)Q^f$ максимальна в G, $P_2Q^f \neq G$ и $\Phi(P) \leq P_2$, то $\Phi(P) = Z(P) = P' = P_2$. Следовательно, $|P : Z(P)| = p^2$. Это означает, что P является группой Миллера-Морено. Но тогда $|P'| = |\Phi(P)| = p$ (см. [14]), что противоречит рассматриваемому случаю.

Достаточность. Напрямую следует из леммы 2. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть G – группа Шмидта. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G – группа одного из следующих типов:*

(a) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*;

(b) *$G = [P]Q$, где P изоморфна либо $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка* 8;

(c) *$G = [P]Q$ – группа Шмидта, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$* и *$\Phi(P) = \Phi^2(P)$.*

(2) *любые две* 3-*максимальные подгруппы группы G являются $F(G)$-перестановочными;*

(3) *любые две 3-максимальные подгруппы группы G являются перестановочными.*

Определение 1. *Будем называть конечную ненильпотентную разрешимую группу, не являющуюся группой Шмидта, но содержащую исключительно нильпотентные* 2-*максимальные подгруппы, группой Белоногова.*

Лемма 3. *Пусть G – примитивная группа Белоногова и M – ее максимальная подгруппа с $M_G = 1$. Тогда в том и только в том случае любые две 2-максимальные подгруппы из G являются $F(G)$-перестановочными, когда G – группа одного из типов*:

(1) *$G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G и M – нильпотентная подгруппа одного из порядков qr или q^2*;

(2) *$G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G, $M = [Q]R$, $|Q| = q$, $|R| = r$ и PR – группа Шмидта.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть G – примитивная группа Белоногова, в которой любые две 2-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными. Поскольку G – ненильпотентная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является нильпотентной, то каждая собственная подгруппа из G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, причем каждая подгруппа Шмидта максимальна в G. Так как G является примитивной разрешимой группой, то, по [15, A, теорема 15.6], $G=[P]M$, где $P = C_G(P) = F(G) = O_p(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Предположим вначале, что группа $G/P \approx M$ нильпотентна. Допустим, что каждая максимальная подгруппа группы G, строго содержащая P, нильпотентна. Тогда, ввиду нильпотентности M, мы имеем $M_G \neq 1$, противоречие. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из G, строго содержащая P, является группой Шмидта. Так как M нильпотентна и, по [15, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$, то p не делит $|M|$. Это влечет, что группа M содержит не более двух силовских подгрупп и $|M|$ делится не более, чем на два необязательно различных простых числа. Следовательно, либо $|M| = qr$, либо $|M| = q^2$. Таким образом, G является группой типа (1).

Теперь предположим, что группа $G/P \approx M$ не является нильпотентной. Так как M максимальна в G, то она является группой Шмидта. В этом случае группа $G/P \approx M$ удовлетворяет условиям леммы 1 и поэтому M является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Допустим, что p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, Q и R – силовские q-подгруппа и r-подгруппа в G соответственно. Понятно, что M имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы R и QR_1, где R_1 – максимальная подгруппа в R. Тогда группа G имеет точно три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $[Q]R$, PR и PQR_1. Если предположить, что подгруппа PR нильпотентна, то $R \subseteq C_G(P) = P$, что невозможно. Следовательно, PR – группа Шмидта. Легко видеть, что тогда $R_1 = 1$ и поэтому $|R| = r$. Таким образом, подгруппа PQ максимальна в G. Если предположить, что подгруппа PQ нильпотентна, то $Q \subseteq C_G(P) = P$, что вновь невозможно. Следовательно, PQ – группа Шмидта с $|Q| = q$. В этом случае G является группой типа (2).

Теперь допустим, что p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M, соответственно. По [15, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, причем $|P_1| = p$. В этом случае PQ является максимальной подгруппой в G. Легко видеть, что $[P]Q$ – подгруппа Шмидта группы G и поэтому $|Q| = q$. Пусть T – такая максимальная подгруппа группы PP_1, что $P_1 \leq T$. Тогда Q и T являются 2-максимальными подгруппами в G, и поэтому ввиду условия TQ является подгруппой в G. Тогда мы имеем $P_1Q \leq TQ < G$, что в силу максимальности P_1Q в G влечет $T = P_1$. Но тогда PP_1 является абелевой группой порядка p^2, что в силу $C_G(P) = P$ приводит к противоречию.

Достаточность. Предположим, что G – группа типа (1). Допустим, что $M = Q \times R$, где $|Q| = q$, $|R| = r$, и покажем, что в группе G любые две 2-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными. Легко видеть, что группа G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы M, PQ и PR. Так как G – группа Белоногова, то каждая ее максимальная подгруппа является либо нильпотентной, либо группой Шмидта. Понятно, что PQ и PR – подгруппы Шмидта в G. Тогда представителями классов 2-максимальных подгрупп в G являются группы P, Q и R.

Покажем, что любые две 2-максимальные подгруппы группы G являются P-перестановочными. Для этого достаточно показать, что Q является P-перестановочной с подгруппой R^f для любого $f \in P$. Пусть f – произвольный элемент из P. Тогда в $P = F(G)$ существует элемент $t = (f)^{-1}$ такой, что $Q(R^f)^t = QR = RQ = (R^f)^tQ$.

Случай $|M| = q^2$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь G – группа типа (2). Так как P – минимальная нормальная подгруппа группы G, $|Q| = q$ и $|R| = r$, то G имеет точно три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы M, $M_2 = PQ$ и $M_3 = PR$. Если допустить, что подгруппа M_2 нильпотентна, то Q является нормальной подгруппой в G, что противоречит $M_G = 1$. Следовательно, M_2 – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и поэтому M_2 имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы P и Q. Аналогично можно показать, что M_3 – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и поэтому M_3 имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы P и R. Тогда представителями классов 2-максимальных подгрупп в G являются группы P, Q и R. Используя рассуждения аналогично, как и выше, можно показать, что в группе G любые две 2-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G – группа Белоногова и $X = F(G)$. Если любые две 2-максимальные подгруппы группы G являются X-перестановочными, то $l_p(G)$ £ 1 для всех простых p.*

Доказательство. Пусть G – группа Белоногова, в которой любые две 2-максимальные подгруппы являются X-перестановочными. Поскольку G – ненильпотентная группа, то в ней существует максимальная ненормальная подгруппа M. Так как при этом G – разрешимая группа и $M \neq M_G$, то мы можем рассмотреть примитивную разрешимую факторгруппу G/M_G. Ввиду [15, A, теорема 15.6], $G/M_G = [F(G/M_G)](M/M_G)$, где $F(G/M_G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G/M_G. Покажем, что $l_p(G/M_G) \leq 1$ для всех простых p.

Если группа G/M_G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, то, очевидно, $l_p(G/M_G) \leq 1$ для всех простых p.

Допустим, что G/M_G – ненильпотентная группа, не являющаяся группой Шмидта. Тогда, очевидно, G/M_G является примитивной группой Белоногова. Ввиду условия и леммы 2.1 из [5], любые две 2-максимальные подгруппы группы G/M_G являются $(F(G)M_G/M_G)$-перестановочными. Рассмотрим следующие формально возможные случаи.

a) Группа $F(G)$ содержится в M_G. В этом случае, очевидно, любые две 2-максимальные подгруппы группы G/M_G являются $F(G/M_G)$-перестановочными.

b) Группа $F(G)$ не содержится в M_G. Так как $F(G)M_G/M_G \approx F(G)/(M_G \cap F(G))$ и $F(G)/(M_G \cap F(G))$ нильпотентна, то $F(G)M_G/M_G \subseteq F(G/M_G)$. С другой стороны, $F(G/M_G)$ является минимальной нормальной подгруппой в G/M_G, что влечет $F(G/M_G) = F(G)M_G/M_G$. Следовательно, любые две 2-максимальные подгруппы группы G/M_G являются $F(G/M_G)$-перестановочными.

Таким образом, группа G/M_G удовлетворяет условиям леммы 3, и поэтому G/M_G является группой одного из типов, описанных в этой лемме. Легко заметить, что в этом случае группа G/M_G имеет абелевы силовские подгруппы, и поэтому $l_p(G/M_G) \leq 1$ для всех простых p. Так как $\Phi(G) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных подгрупп группы G, то $l_p(G/\Phi(G)) = max\ \{l_p(G/M_G)\}$ (см. [12, VI, лемма 6.4]). Следовательно, $l_p(G/\Phi(G)) \leq 1$. Тогда, ввиду [12, VI, лемма 6.4], $l_p(G) = l_p(G/\Phi(G)) \leq 1$ для всех простых p. Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4. *Пусть $P = [H]C_p$, где H – элементарная p-группа, $|C_p| = p$ и любые две 2-максимальные подгруппы из P являются H-перестановочными. Тогда P – абелева группа.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна и пусть P – контрпример минимального порядка. Предположим, что $Z(P)$ не содержится в H. Тогда $P=HZ(P)$ и поэтому P – абелева группа. Следовательно, $Z(P) \leq H$. Тогда $Z(P)=Z_1\times Z_2 \ldots \times Z_t$, где $|Z_1| = \ldots = |Z_2| = p$. Несложно показать, что для группы P/Z_1 выполняются условия леммы. Значит, по индукции, факторгруппа P/Z_1 является абелевой. Следовательно, мы можем считать, что $Z_1 = Z(P)$. В этом случае, по [13, теорема 5.1.9], $|P| = p^3$. Так как $P = [H]C_p$ и подгруппы H и C_p порождаются элементами порядка p, то $P = \Omega_1(P)$. Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Так как в группе P любые две 2-максимальные подгруппы H-перестановочны и в P существует два класса неинвариантных несопряженных 2-максимальных подгрупп, то P абелева, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G – примитивная группа Белоногова и M – ее максимальная подгруппа с $M_G = 1$. Тогда в том и только в том случае любые две 3-максимальные подгруппы из G являются $F(G)$-перестановочными, когда G – группа одного из типов*:

(1) *$G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G и M – нильпотентная подгруппа одного из порядков qr или q^2*;

(2) $G = [P]M$, *где* P *– минимальная нормальная* p*-подгруппа в* G, $M = [Q]R$, $|Q| = q$, $|R| = r$ *и* PR *– группа Шмидта.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – примитивная группа Белоногова, в которой любые две 3-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными. Поскольку G – ненильпотентная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является нильпотентной, то каждая собственная подгруппа из G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, причем каждая подгруппа Шмидта максимальна в G. Так как G является примитивной разрешимой группой, то, по [15, A, теорема 15.6], $G=[P]M$, где $P = C_G(P) = F(G) = O_p(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Предположим вначале, что группа $G/P \approx M$ нильпотентна. Допустим, что каждая максимальная подгруппа группы G, строго содержащая P, нильпотентна. Тогда, ввиду нильпотентности M, мы имеем $M_G \neq 1$, противоречие. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из G, строго содержащая P, является группой Шмидта. Так как M нильпотентна и, по [15, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$, то p не делит $|M|$. Это влечет, что группа M содержит не более двух силовских подгрупп и $|M|$ делится не более, чем на два необязательно различных простых числа. Следовательно, либо $|M| = qr$, либо $|M| = q^2$. Таким образом, G является группой типа (1).

Теперь предположим, что группа $G/P \approx M$ не является нильпотентной. Так как M максимальна в G, то она является группой Шмидта. В этом случае группа $G/P \approx M$ удовлетворяет условиям леммы 2 и поэтому M является группой одного из типов (1)-(3), описанных в этой лемме.

Допустим, что M является группой типа (1) в лемме 2 и p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Понятно, что M имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы R и QR_1, где R_1 – максимальная подгруппа в R. Тогда группа G имеет точно три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $[Q]R$, PR и PQR_1. Если предположить, что подгруппа PR нильпотентна, то $R \leq C_G(P)=P$, что невозможно. Следовательно, PR – группа Шмидта. Легко видеть, что тогда $R_1 = 1$ и поэтому $|R| = r$. Таким образом, подгруппа PQ максимальна в G. Если предположить, что подгруппа PQ нильпотентна, то $Q \leq C_G(P)=P$, что также невозможно. Следовательно, PQ – группа Шмидта с $|Q| = q$. В этом случае G является группой типа (2).

Теперь допустим, что M является группой типа (1) в лемме 2 и p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M соответственно. По [15, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, причем $|P_1| = p$. В этом случае PQ является максимальной подгруппой в G. Легко видеть, что $[P]Q$ – подгруппа Шмидта группы G и поэтому $|Q| = q$. Это влечет, по условию, что любые две 2-максимальные подгруппы из PP_1 являются $F(G)$-перестановочны. Так как $P = F(G)$, то, по лемме 4, PP_1 – абелева группа. Но это в свою очередь противоречит $P = C_G(P)$.

Пусть теперь M является группой типа (2) в лемме 2 и p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$ – такая группа Шмидта, в которой подгруппа Q изоморфна либо группе $M_3(q)$, либо группе кватернионов порядка 8. В каждом из этих случаев $|\Phi(Q)| = q \neq 1$ и поэтому $P\Phi(Q)R$ – максимальная подгруппа группы G. Понятно, что эта подгруппа является нильпотентной и поэтому $\Phi(Q) \leq C_G(P) = P$, что невозможно.

Теперь предположим, что M является группой типа (2) в лемме 2 и p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$ – группа Шмидта, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M соответственно. По [15, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, где Q изоморфна либо группе $M_3(q)$, либо группе кватернионов порядка 8. Легко заметить, что $|P_1| = p$. Но тогда PQ является максимальной подгруппой в G. Понятно, что PQ ненильпотентна и поэтому PQ – подгруппа Шмидта в G с $|Q| = q$. Это означает, что подгруппа M не удовлетворяет условию (2) леммы 2, противоречие.

Допустим теперь, что M является группой типа (3) в лемме 2. Рассуждая аналогично, как и выше, можно показать, что данный случай не имеет место.

Достаточность. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в случае, когда G является группой одного из типов (1)-(2), любые две 3-максимальные подгруппы группы G являются $F(G)$-перестановочными. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть G – группа Белоногова и $X = F(G)$. Если любые две 3-максимальные подгруппы группы G являются X-перестановочными, то $l_p(G)$ £ 1 для всех простых p.*

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 3.

The paper is devoted to research of Schmidt groups and Belonogov's groups in which any two second or any two third maximal subgroups (is generalized) are permutable.
The key words: *The maximal subgroup, the second maximal subgroup, the third maximal subgroup, a Schmidt group, a Belonogov's group, X-permutable subgroup, a soluble group, a primitive subgroup, a normal subgroup.*

Список литературы

1. Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. 2003. Vol. 181. P. 297-308.

2. Guo, W. *X*-semipermutable subgroups of finite groups / W.Guo, K.P.Shum, A.N.Skiba // J. Algebra. 2007. Vol. 315. P. 31-41.

3. Li, Baojun New characterizations of finite supersoluble groups / B.Li, A.N.Skiba // Science in China. Serias A: Mathematics. 2008. Vol. 50, № 1. P. 827-841.

4. Skiba, A.N. *H*-permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. 2003. Vol. 4(19). P. 37-39.

5. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull Math. 2005. Vol. 29, № 2. P. 792-810.

6. Guo, W. On finite groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W.Guo, H.V.Legchekova, A.N.Skiba. Гомель, 2008. С. 17 (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 10).

7. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups / W.Guo, H.V.Legchekova, A.N.Skiba. Гомель, 2008. С. 17 (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 11).

8. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N.Skiba // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2006. Т. 36, № 3. С. 12-31.

9. Го, Веньбинь О конечных ненильпотентных группах, в которых любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны или любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны / В.Го, Ю.В.Луценко, А.Н.Скиба. Гомель, 2008. – 26 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; 20).

10. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А.Белоногов // Матем. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 21-32.

11. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York-Evanston-London: Harper and Row, 1968.

12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B.Huppert; Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.

13. Kurzweil, H. The theory of finite groups: an introduction / H.Kurzweil, B.Stellmacher; New York – Berlin – Heidelberg: Springer-Verdag, 2004.

14. Miller, G.A. Monabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A.Miller, H.Moreno // Trans. Am. Soc. 1903. № 4. P. 398-404.

15. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K.Doerk, T.Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruy.

Об авторе

Ю.В. Луценко - Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

УДК 511.3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ РИМАНА

В. Ю. Макаров

Статья посвящена изучению свойств функций W_0 и $W_0\,*$, содержащих z $-$ функцию Римана в критической полосе .

Ключевые слова: *z $-$ функция Римана, критическая полоса , преобразование Меллина , принцип Фрагмена-Линделефа , контур интегрирования , специальные функции .*

Введем и будем исследовать в дальнейшем две специальные функции

$W_0(s\,,t)=E_0(s\ +it)+E_0(s\ -it)$ и $W_0\,*(s\,,t)=i\{E_0(s\ +it)-E_0(s\ -it)\}$, где $t\in\mathbf{R}$ и параметр $s\ \in(\frac{1}{2},1), E_0(s)=\Gamma(\frac{s}{2})z\,(s), s=s\ +it, z\,(s)$ - функция Римана.

Функции $W_0(s\,,t),\ W_0\,*(s\,,t)$ содержат z -функцию в критической полосе.

Теорема 1. Для функции $W_0(s\,,t)$ справедлива формула

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}W_0(s\,,t)\cos(tx)dt=p^{\frac{3}{2}}\{e^{-(1-s\,)x}\Psi_2(e^{-2x})+e^{(1-s\,)x}\Psi_2(e^{2x})\}-pch(sx)\,.$$

Доказательство. Представим интеграл $\int_0^{+\infty}W_0(s\,,t)\cos tx\,dt$ в виде суммы двух интегралов ,

Воспользовавшись определением функции $W_0(s\,,t)$

$$\int_0^{+\infty}W_0(s\,,t)\cos tx\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\{E_0(s\ +it)+E_0(s\ -it)\}\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\{E_0(s\ +it)+E_0(s\ -it)\}\exp(itx)dt+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\{E_0(s\ +it)+E_0(s\ -it)\}\exp(-itx)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\{E_0(s\ +it)+E_0(s\ -it)\}\exp(itx)dt+\frac{1}{2}\int_0^{-\infty}\{E_0(s\ -it)+E_0(s\ +it)\}\exp(itx)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(s\ +it)e^{itx}\,dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(s\ -it)e^{itx}dt=I_1+I_2.$$

Вычислим сначала первый интеграл I_1

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(s\ +it)e^{itx}\,dt=\frac{1}{2i\exp(sx)}\int_{s\,-i\infty}^{s\,+i\infty}E_0(s)e^{xs}ds=\frac{1}{2ie^{s\,x}}\int_{s\,-i\infty}^{s\,+i\infty}\Gamma(\frac{s}{2})z\,(s)e^{xs}ds=$$

$$=\frac{1}{2ie^{s\,x}}\int_{s\,-i\infty}^{s\,+i\infty}\Gamma(\frac{s}{2})z\,(s)(e^x)^s\,ds=\frac{1}{2ie^{s\,x}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma(\frac{s}{2})z\,(s)(e^x)^s\,ds-2pi\frac{1}{2ie^{s\,x}}\Gamma(\frac{1}{2})e^x=$$

$$= \frac{1}{ie^{s x}} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(w) z\,(2w)(e^{2x})^{w}\, dw - pe^{(1-s)x}\sqrt{p}$$

где заменили контур интегрирования $x = s$ на контур $x = 2$, воспользовавшись принципом Фрагмена-Линделефа см. [1]

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} U(s)ds + 2pi \operatorname*{Res}_{s=1} U(s) = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} U(s)ds$$

и $it = s - s$, $dt = \frac{ds}{i}$, $w = \frac{s}{2}$, $ds = 2dw$, тогда $\quad I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(s + it)e^{itx}\, dt =$

$$= \frac{1}{ie^{s x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(w)\left(\frac{n^2}{e^{2x}}\right)^{-w} dw - p^{\frac{3}{2}} e^{x(1-s)}.$$

Воспользуемся преобразованием Меллина см. [1] ,[2], используя ряд экспонент, абсолютно сходящийся в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0 : \Phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^2 s)$,

тогда

$$I_1 = \frac{e^{-xs}}{i} 2pi \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^2 e^{-2x}) - p^{\frac{3}{2}} e^{x(1-s)} = 2p\, e^{-sx}\Phi\left(e^{-2x}\right) - p^{\frac{3}{2}} e^{x(1-s)}.$$

Теперь вычислим

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(s - it)e^{itx}dt = -\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{-\infty} E_0(s + it)e^{-itx}dt = -\frac{e^{sx}}{2i}\int_{s+i\infty}^{s-i\infty} E_0(s)e^{-sx}ds =$$

$$= \frac{e^{s x}}{2i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \Gamma(\frac{s}{2})e^{-xs} z\,(s)ds = \frac{e^{s x}}{2i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \Gamma(\frac{s}{2}) z\,(s)(e^{x})^{-s} ds =$$

$$= \frac{e^{s x}}{2i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(\frac{s}{2}) z\,(s)(e^{x})^{-s} ds - 2pi\frac{e^{s x}}{2i}\Gamma(\frac{1}{2})e^{-x}\operatorname*{Res}_{s=1} z\,(s) = \frac{e^{s x}}{i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(R) z\,(2R)(e^{2x})^{-R} dR -$$

$$- p^{\frac{3}{2}} e^{-(1-s)x} = \frac{e^{s x}}{i}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(R)\left(n^2 e^{2x}\right)^{-R} dR - p^{\frac{3}{2}} e^{-x(1-s)} =$$

$$= \frac{1}{ie^{xs}} 2pi \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^2 e^{2x}) - p^{\frac{3}{2}} e^{-x(1-s)} = 2p\, e^{sx}\Phi\left(e^{2x}\right) - p^{\frac{3}{2}} e^{-x(1-s)}, s = 2R, ds = 2dR.$$

Тогда $I_1 + I_2 = 2p\{e^{-sx}\Phi(e^{-2x}) + e^{sx}\Phi(e^{2x})\} - 2p^{\frac{3}{2}} ch(x(1-s))$.

Воспользуемся формулами :

$1 + 2\Phi(e^{-2x}) = \sqrt{p}\, e^{x}[1 + 2\ \Psi_2(e^{2x})\ ]$ и $1 + 2\Phi(e^{2x}) = \sqrt{p}\, e^{-x}[1 + 2\ \Psi_2(e^{-2x})\ ]$, где

Ψ_2 (s) - сумма абсолютно сходящегося ряда экспонент в правой полуплоскости

$\operatorname{Re} s > 0:\ \Psi_2(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-p^2 n^2 s)$, тогда получим окончательно формулу

$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} W_0(s,t)\cos(tx)dt = p^{\frac{3}{2}}\{e^{-(1-s)x}\Psi_2(e^{-2x}) + e^{(1-s)x}\Psi_2(e^{2x})\} - pch(sx)$ и теорема 1 доказана.

Замечание .Если в качестве комплексного параметра взять $x = -ia$, тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} W_0(s,t)ch(ta)dt = p^{\frac{3}{2}}\{e^{(1-s)ia}\Psi_2(e^{2ia}) + e^{-(1-s)ia}\Psi_2(e^{-2ia})\} - p\cos(sa).$$

Кроме того , получили еще две формулы для вычисления интеграла

$\int_0^{+\infty} W_0(s,t)\cos(tx)dt = 2p\{e^{sx}\Phi(e^{2x}) + \sqrt{p}\,e^{(1-s)x}\Psi_2(e^{2x})\} - pe^{-sx} - p^{\frac{3}{2}}e^{(1-s)x}$ и

$$\int_0^{+\infty} W_0(s,t)\cos(tx)dt = 2p\{e^{-sx}\Phi(e^{-2x}) + e^{sx}\Phi(e^{2x})\} - 2p^{\frac{3}{2}}ch(x(1-s)).$$

Теорема 2. Для функции $W_0{}^*(s,t)$ справедлива формула

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} W_0{}^*(s,t)\sin(tx)dt = p\{e^{-sx}\Phi(e^{-2x}) - e^{sx}\Phi(e^{2x})\} - p^{\frac{3}{2}}sh(x(1-s)).$$

Доказательство. Вычислим интеграл:

$$\int_0^{+\infty} W_0{}^*(s,t)\sin(tx)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[E_0(s+it) - E_0(s-it)]\left(e^{itx} - e^{-itx}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[E_0(s+it) - E_0(s-it)]e^{itx}dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[E_0(s+it) - E_0(s-it)]e^{-itx}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[E_0(s+it) - E_0(s-it)]e^{itx}dt + \frac{1}{2}\int_0^{-\infty}[E_0(s-it) - E_0(s+it)]e^{itx}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[E_0(s+it) - E_0(s-it)]e^{itx}dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}[E_0(s-it) - E_0(s+it)]e^{itx}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[E_0(s+it) - E_0(s-it)]e^{itx}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(s+it)e^{itx}dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(s-it)e^{itx}dt = I_1 - I_2.$$

Так как интегралы I_1 и I_2 вычислены в теореме 1 , имеем :

$I_1 - I_2 = 2p\{e^{-sx}\Phi(e^{-2x}) - e^{sx}\Phi(e^{2x})\} - p^{\frac{3}{2}}(e^{x(1-s)} - e^{-x(1-s)})$ и окончательно получаем

формулу для интеграла :

$\int_0^{+\infty} W_0{}^*(s,t)\sin(tx)dt = 2p\{e^{-sx}\Phi(e^{-2x}) - e^{sx}\Phi(e^{2x})\} - 2p^{\frac{3}{2}}sh(x(1-s))$ и теорема 2 доказана .

В результате получили значение интеграла с параметром $x \in \mathbf{C}$:

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} W_0{*}(s,t)\sin(tx)dt = p\{e^{-sx}\Phi(e^{-2x}) - e^{sx}\Phi(e^{2x})\} - p^{\frac{3}{2}} sh(x(1-s)).$$

Замечание . Если взять значение параметра $x = -ia$, тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} W_0{*}(s,t)sh(ta)dt = pi\{e^{sia}\Phi(e^{2ia}) - e^{-sia}\Phi(e^{-2ia})\} + p^{\frac{3}{2}}\sin(a(1-s)).$$

В работах [3],[4] и [5] рассматривались функции $W(s,t) = E(s+it) + E(s-it)$ и

$W{*}(s,t) = i\{E(s+it) - E(s-it)\}$, где $t \in \mathbf{R}$ параметр $s \in (\frac{1}{2},1)$,

$E(s) = p^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})z(s), s = s + it.$

Для функций $W(s,t)\cos(tx)$ и $W{*}(s,t)\sin(tx)$ были получены интегральные

представления и доказано , что функции $W(s,t)$ и $W{*}(s,t)$ меняли знак в критической

полосе Римана .

In this paper is devoted to studying of properties of functions W_0 and $W_0{*}$,containing z - function Riemann.

The key words: *z - function Riemann., the critical strip , transformation Mellin , principle F-L, countor of the integration , special functions .*

Список литературы

1. Titchmarsh E. C. The Theory of the Riemann Zeta – Fuction, second edition, edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

2. Ramanujan S., New expressions for Riemann's function $z(s)$ and $\Xi(t)$. Quart. Math. 46. 1915. Pp 253-261.

3. Макаров В.Ю.The Riemann Hypothesis ,International Conference. Protaras. Cyprus. 2006 .

4. Макаров В.Ю.Интегралы от функций , содержащих нули Zeta –функции в критической полосе. Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения. Новороссийск. 2008 .

5. Макаров В.Ю. Свойства функций **W** и **W*** в критической полосе Zeta-функции Римана. Труды XVI международного симпозиума Ряды Фурье и их приложения. Южный Федеральный университет. Ростов- на –Дону. 2008 .

Об авторе

В.Ю. Макаров – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, makarov17@ bk.ru .

УДК 511.3

СВОЙСТВА КОМБИНАЦИЙ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ Φ И Ψ_2 В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ РИМАНА

В.Ю. Макаров

Статья посвящена изучению комбинаций производных функций $\Phi(\exp(2U))$ и $\Psi_2(\exp(2U))$ в критической полосе Римана.
Ключевые слова : *специальные функции, производные, соотношения, критическая полоса Римана .*

Рассмотрим функции

$\Phi(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ и $\Psi_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 p^2 x}$ определенные на луче $[0,+\infty)$.

Справедлива теорема для производных 1-го и 2-го порядков от специальных функций

$\Phi(x)$ и $\Psi_2(x)$, если $x=e^{2U}$ по переменной U , если $U=0$.

Теорема 1. Справедливо соотношение в критической полосе Римана

$$\frac{\Phi^{(1)}(1)+\Phi^{(2)}(1)}{\Psi_2^{(1)}(1)+\Psi_2^{(2)}(1)}=\sqrt{p}\ .$$

Доказательство. Так как для всех $U\in[0,+\infty)$ справедливо соотношение

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 e^{-2U}} = \sqrt{p}\, e^{U}(1+2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-p^2 n^2 e^{2U}})$$

в работе [1] рассматривалось соотношение $1+2\Psi(x)=x^{-\frac{1}{2}}(1+2\Psi(x^{-1}))$, где

$\Psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-pn^2 x}$ и изучались производные всех порядков .

Дифференцируя последнее равенство по переменной **U** получим :

$$4e^{-2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} = \sqrt{p}\, e^{U}(1+2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-p^2 n^2 e^{2U}})-$$

$-\sqrt{p}\, e^{U} 4p^2 e^{2U}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}}$, тогда $4e^{-2U}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} -1-$

$$-2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 e^{-2U}} = -4\sqrt{p}\,p^2 e^{3U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}}$$,следовательно

$$-8e^{-2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} + 8e^{-4U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 e^{-2U}} - 4e^{-2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} =$$

$$= -12p^2\sqrt{p}\,e^{3U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} + 8p^4\sqrt{p}\,e^{5U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-p^2 n^2 e^{2U}}.$$

Теперь выберем $U = 0$, тогда

$$2\left(-2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2}\right) + 2\left(-4\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2}\right) = 12[\sqrt{p}\left(-2p^2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2}\right) +$$
$$+2\left(-4p^2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2} + 4p^4\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-p^2 n^2}\right)],$$ следовательно

$$\Phi^{(1)}(1) + \Phi^{(2)}(1) = \sqrt{p}\left(\Psi_2^{(1)}(1) + \Psi_2^{(2)}(1)\right).$$

Теорема 2. Справедливо соотношение в критической полосе Римана

$$\frac{3\Phi^{(1)}(1) + 2\Phi^{(2)}(1) - 2\Phi^{(3)}(1) - \Phi^{(4)}(1)}{3\Psi_2^{(1)}(1) + 2\Psi_2^{(2)}(1) - 2\Psi_2^{(3)}(1) - \Psi_2^{(4)}(1)} = \sqrt{p}.$$

Доказательство. Так как

$$-6e^{-2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} + 4e^{-4U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 e^{-2U}} =$$

$$= e^{U}\sqrt{p}\,[-6p^2 e^{-2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} + 4p^4 e^{4U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-p^2 n^2 e^{2U}}],$$ следовательно

$$-36e^{-2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} + 164e^{-4U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 e^{-2U}} -$$

$$-112e^{-6U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^6 e^{-n^2 e^{-2U}} + 16e^{-8U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^8 e^{-n^2 e^{-2U}} =$$

$$= e^{U}\sqrt{p}\,[-36p^2 e^{2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} + 164p^4 e^{4U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} -$$

$$-112p^6 e^{6U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} + 16p^8 e^{8U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^8 e^{-p^2 n^2 e^{2U}}].$$

Пусть переменная величина U принимает значение равное нулю , тогда

$$-\Phi^{(2)}(1) - 2\Phi^{(3)}(1) - \Phi^{(4)}(1) - \sqrt{p}\,[-\Psi_2^{(2)}(1) - 2\Psi_2^{(3)}(1) - \Psi_2^{(4)}(1)] = 0 \text{ и}$$

$$3\Phi^{(1)}(1) + 3\Phi^{(2)}(1) - \sqrt{p}\,[3\Psi_2^{(1)}(1) + 3\Psi_2^{(2)}(1)] = 0$$

складывая два последних равенства , получим

$$3\Phi^{(1)}(1) + 2\Phi^{(2)}(1) - 2\Phi^{(3)}(1) - \Phi^{(4)}(1) - \sqrt{p}\,[3\Psi_2^{(1)}(1) + 2\Psi_2^{(2)}(1) - 2\Psi_2^{(3)}(1) - \Psi_2^{(4)}(1)] = 0 \text{ и}$$

теорема 2 доказана .

Теорема 3 . Справедливо соотношение в критической полосе Римана

$$\frac{33\Phi^{(1)}(1) + 11\Phi^{(2)}(1) - 36\Phi^{(3)}(1) + 2\Phi^{(4)}(1) + 24\Phi^{(5)}(1) + 8\Phi^{(6)}(1)}{33\Psi_2^{(1)}(1) + 11\Psi_2^{(2)}(1) - 36\Psi_2^{(3)}(1) + 2\Psi_2^{(4)}(1) + 24\Psi_2^{(5)}(1) + 8\Psi_2^{(6)}(1)} = \sqrt{p}\ .$$

Доказательство. Воспользуемся верным равенством

$$-36e^{-2U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} + 164e^{-4U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 e^{-2U}} -$$

$$-112e^{-6U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^6 e^{-n^2 e^{-2U}} + 16e^{-8U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^8 e^{-n^2 e^{-2U}} =$$

$$= e^U \sqrt{p}\,[-36p^2 e^{2U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} + 164p^4 e^{4U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} -$$

$$-112p^6 e^{6U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-p^2 n^2 e^{2U}} + 16p^8 e^{8U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^8 e^{-p^2 n^2 e^{2U}}]$$

и будем дифференцировать по переменной U два раза , осуществляя преобразования так,

что бы вычислив производную четного порядка , сохранялась симметрия

коэффициентов. В результате чего, получим соотношение

$$-216e^{-2U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 e^{-2U}} + 3792e^{-4U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2 e^{-2U}} -$$

$$-8460e^{-6U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^6 e^{-n^2 e^{-2U}} + 5168e^{-8U} \sum_{n=1}^{+\infty} n^8 e^{-n^2 e^{-2U}} -$$

$$-1056e^{-10U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{10}e^{-n^2e^{-2U}} + 64e^{-12U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{12}e^{-n^2e^{-2U}} =$$

$$=\sqrt{p}\,e^{U}[-216p^{2}e^{2U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2}e^{-p^{2}n^{2}e^{2U}} + 3792p^{4}e^{4U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{4}e^{-p^{2}n^{2}e^{2U}} -$$

$$-8460p^{6}e^{6U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{6}e^{-p^{2}n^{2}e^{2U}} + 5168p^{8}e^{8U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{8}e^{-p^{2}n^{2}e^{2U}} -$$

$$-1056p^{10}e^{10U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{10}e^{-p^{2}n^{2}e^{2U}} + 64p^{12}e^{12U}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{12}e^{-p^{2}n^{2}e^{2U}}].$$

Пусть теперь переменная величина U=0 , тогда

$\Phi^{(3)}(1)+3\Phi^{(4)}(1)+3\Phi^{(5)}(1)+\Phi^{(6)}(1)-\sqrt{p}\,[\Psi_2{}^{(3)}(1)+3\Psi_2{}^{(4)}(1)+3\Psi_2{}^{(5)}(1)+\Psi_2{}^{(6)}(1)]=0$ или

$8\Phi^{(3)}(1)+24\Phi^{(4)}(1)+24\Phi^{(5)}(1)+8\Phi^{(6)}(1)-\sqrt{p}\,[8\Psi_2{}^{(3)}(1)+24\Psi_2{}^{(4)}(1)+24\Psi_2{}^{(5)}(1)+8\Psi_2{}^{(6)}(1)]=0$
учитывая , что

$-22\Phi^{(2)}(1)-44\Phi^{(3)}(1)-22\Phi^{(4)}(1)-\sqrt{p}\,[-22\Psi_2{}^{(2)}(1)-44\Psi_2{}^{(3)}(1)-22\Psi_2{}^{(4)}(1)]=0$ имеем

$$-22\Phi^{(2)}(1)-36\Phi^{(3)}(1)+2\Phi^{(4)}(1)+24\Phi^{(5)}(1)+8\Phi^{(6)}(1)-\sqrt{p}\,[-22\Psi_2{}^{(2)}(1)-36\Psi_2{}^{(3)}(1)+$$

$$+2\Psi_2{}^{(4)}(1)+24\Psi_2{}^{(5)}(1)+8\Psi_2{}^{(6)}(1)]=0$$

и так как

$33\Phi^{(1)}(1)+33\Phi^{(2)}(1)-\sqrt{p}\,[33\Psi_2{}^{(2)}(1)+33\Psi_2{}^{(3)}(1)]=0$ окончательно получим следующее

соотношение

$$33\Phi^{(1)}(1)+11\Phi^{(2)}(1)-36\Phi^{(3)}(1)+2\Phi^{(4)}(1)+24\Phi^{(5)}(1)+8\Phi^{(6)}(1)-\sqrt{p}\,[33\Psi_2{}^{(1)}(1)+11\Psi_2{}^{(2)}(1)-$$

$-36\Psi_2{}^{(3)}(1)+2\Psi_2{}^{(4)}(1)+24\Psi_2{}^{(5)}(1)+8\Psi_2{}^{(6)}(1)]=0$ и теорема 3 доказана .

In this paper is devoted to studying of combinations of derivative functions $\Phi(\exp(2U))$ and $\Psi_2(\exp(2U))$ in crical strip .

The key words: *special functions ,derivatives, relations , the critical strip .*

Список литературы

1.E. Titchmarsh. The Theory of Riemann Zeta-Function, second edition. Oxford University Press. 1986 .

Об авторе

В.Ю. Макаров – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, makarov17@ bk.ru .

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С *X*-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

О.В. Нетбай

В данной работе на основе понятия *X*-перестановочной подгруппы получены новые характеризации p-разрешимых и p-сверхразрешимых групп.

Ключевые слова: *X-перестановочная подгруппа, p-разрешимая группа, p-сверхразрешимая группа, p-нильпотентная группа, p-группа, силовская подгруппа, нормальная подгруппа.*

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Известно, что строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. Впервые это было замечено в работе Хупперта [1], где, в частности, была доказана свехразрешимость разрешимой группы G при условии, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы G. Несколько позднее в работе [2] Сринивазан доказал, что группа G является сверхразрешимой при условии, что в G имется такая нормальная подгруппа N со сверхразрешимой факторгруппой G/N, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из N нормальны в G. Эти два результата получили развитие в исследованиях многих авторов.

Целью данной работы является дальнейший анализ некоторых результатов рассмотренного направления на основе понятия X-перестановочной подгруппы. Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B, если $AB=BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется перестановочной [3] или квазинормальной [4] подгруппой в G. Часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x, для которого $AB^x=B^xA$.

Определение. [5] Пусть A, B – подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда A называется *X-перестановочной* с B, если $AB^x=B^xA$ для некоторого $x \in X$.

Используя понятие X-перестановочности можно охарактеризовать многие важные классы групп по наличию в них тех или иных X-перестановочных подгрупп для подходящих X. Например, используя это понятие можно дать следующую интерпретацию классической теоремы Холла о разрешимых группах (см., например, [6, II, теорема 2.4]): *группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две холловские подгруппы G-перестановочны*. Согласно теореме 3.8 из [7], *группа G является сверхразрешимой тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы G-перестановочны со всеми другими подгруппами этой группы*. Новые характеризации в терминах X-перестановочных подгрупп для классов разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп можно найти в работах [5, 7, 8, 9, 10, 11].

Напомним, что группа G называется p-сверхразрешимой, если каждый ее главный фактор является либо p'-группой, либо группой порядка p. Для сверхразрешимых и p-нильпотентных групп получено большое число их описаний, и большая часть из них отражена в книге [12]. В то же время p-сверхразрешимые группы остаются мало изученными и в настоящее время. Нами доказана следующая теорема в данном направлении.

Теорема. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, $|P| > p$ и X – нормальная p-нильпотентная подгруппа в G. Если каждая максимальная подгруппа из P X-перестановочна с каждой силовской q-подгруппой из G для всех $q \neq p$, то группа G p-сверхразрешима.*

Предварительные результаты

Для доказательства основного результата нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G и X – нормальная p-разрешимая подгруппа в G. Если P X-перестановочна с каждой силовской q-подгруппой из G для всех $q \neq p$, то группа G p-разрешима.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Рассмотрим два формально возможных случая.

1) $X \neq 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G, которая содержится в X. Тогда N является либо p-группой, либо p'-группой. Покажем, что условие леммы выполняется для G/N. Действительно, ясно, что X/N является нормальной p-разрешимой подгруппой в G/N. Кроме того, PN/N является силовской p-подгруппой в G/N. Пусть Q/N – силовская q-подгруппа в G/N, где $q \neq p$. Тогда $Q = Q_1N$, где Q_1 – некоторая силовская q-подгруппа в Q. Ясно, что Q_1 является силовской q-подгруппой в G. Поскольку P X-перестановочна с Q_1, то PN/N X/N-перестановочна с $Q_1N/N = Q/N$, по лемме 2.1(3) из [13]. Так как $|G/N| < |G|$, то, по выбору группы G, факторгруппа G/N p-разрешима. Это влечет, p-разрешимость группы G, что противоречит выбору группы G.

2) $X = 1$. Пусть Q – силовская q-подгруппа в G, где $q \neq p$. По условию, P перестановочна со всеми силовскими q-подгруппами группы G и поэтому P перестановочна с каждой сопряженной с Q подгруппой Q^g для всех $g \in G$. Так как $G \neq PQ^g$ (в противном случае G – разрешимая группа), то, по теореме 3 из [14], группа G непроста.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Покажем, что группа N p-разрешима. Действительно, так как N нормальна в G, то NP является подгруппой в G. Мы можем полагать, что $p \mid |N|$ (в противном случае N p-разрешима). Если $NP = G$, то $|G : N| = p^i$ и поэтому все r-подгруппы, где $r \neq p$ содержатся в N. По лемме [15, V, 7.7], подгруппа $N \cap P$ является силовской p-подгруппой в N. Пусть Q_1 – силовская q-подгруппа в N, где $q \neq p$. Тогда, поскольку $|G : N| = p^i$, то Q_1 является силовской q-подгруппой в G. Значит, $PQ_1 = Q_1P$ и поэтому

$$PQ_1 \cap N=(P \cap N)Q_1=Q_1 (N \cap P).$$

Таким образом, условие леммы выполняется для N и поэтому, по выбору группы G, N p-разрешима.

Предположим теперь, что $NP \neq G$. Пусть R_1 – произвольная силовская r-подгруппа в NP, где $r \neq p$. Ввиду [15, VI, 4.7], R_1 – силовская r-подгруппа в N. Тогда $R_1 = N \cap R$, где R – некоторая силовская r-подгруппа в группе G. Значит,

$$R_1P = (R \cap N)P = RP \cap RN = P(R \cap N) = PR_1$$

и поэтому условие леммы выполняется для PN. Тогда по выбору группы G, подгруппа NP p-разрешима, а значит, N p-разрешима.

Аналогично случаю 1) легко показать, что условие леммы верно для G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то, по выбору группы G, факторгруппа G/N p-разрешима. Это влечет, p-разрешимость G, что невозможно, ввиду выбора группы G. Данное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть P – силовская p-подгруппа конечной группы G, $|P| > p$ и X – нормальная p-разрешимая подгруппа в G. Если каждая максимальная подгруппа из P X-перестановочна с каждой силовской q-подгруппой из G для всех $q \neq p$, то группа G p-разрешима.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Рассмотрим два формально возможных случая.

1) X ¹ 1. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G, которая содержится в X. Поскольку группа X p-разрешима, то N является либо p-группой, либо p'-группой. Покажем, что условие леммы выполняется для G/N. Действительно, ясно, что X/N является нормальной p-разрешимой подгруппой в G/N. Кроме того, PN/N является силовской p-подгруппой в G/N. Пусть P_1/N – произвольная максимальная подгруппа в PN/N. Если N – p-группа, то P_1 является максимальной подгруппой в P и в этом случае условие леммы выполняется для G/N. Предположим теперь, что N – p'-группа. Тогда $P_1 = MN$, где M – некоторая максимальная подгруппа в P. Пусть Q/N – силовская q-подгруппа в G/N, где p ¹ q. Тогда $Q = Q_1N$, где Q_1 – некоторая силовская q-подгруппа в Q. Согласно условию леммы, M X-перестановочна с Q_1 и поэтому $P_1/N = MN/N$ X/N-перестановочна с $Q_1N/N=Q/N$, по лемме 2.1(3) из [13]. Так как $|G/N| <| G|$, то по выбору группы G, факторгруппа G/N p-разрешима. Это влечет p-разрешимость G. Противоречие.

2) $X=1$. Пусть Q – силовская q-подгруппа в G, где q ¹ p. Если силовская p-подгруппа P группы G не является циклической, то она содержит две различные максимальные подгруппы P_1 и P_2 такие, что $P = P_1P_2$. Тогда, используя условие леммы, имеем

$$PQ = P_1P_2Q = QP_1P_2 = QP,$$

И поэтому, ввиду леммы 1, группа G p-разрешима.

Предположим теперь, что P – циклическая группа с максимальной подгруппой P_1. Покажем, что группа G не является простой. Действительно, по условию, P_1 перестановочна со всеми силовскими q-подгруппами группы G (q ¹ p) и поэтому P_1 перестановочна с каждой сопряженной с Q подгруппой Q^g для всех g Î G. Так как G ¹ P_1Q^g (в противном случае G – разрешимая группа), то, по теореме 3 из [14], группа G непроста.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Покажем, что группа N p-разрешима. Пусть R_1 – произвольная силовская r-подгруппа в NP_1, где r ¹ p. Ввиду [15, VI, 4.7], R_1 – силовская r-подгруппа в N. Тогда $R_1 = N$ Ç R, где R – некоторая силовская r-подгруппа в группе G. Значит,

$$R_1P_1 = (R \text{ Ç } N)P_1 = RP_1 \text{ Ç } RN = P_1(R \text{ Ç } N) = P_1R_1$$

и поэтому условие леммы выполняется для P_1N. Тогда по выбору группы G, подгруппа NP_1 p-разрешима, а следовательно, N p-разрешима.

Если P_1 не является силовской подгруппой в NP_1 и NP_1 ¹ G, тогда, ввиду выбора группы G, NP_1 p-разрешима. Значит, N также p-разрешима.

Предположим, что $NP_1 = G$. Тогда $|G : N| = p^i$ для некоторого i Î N и поэтому все q-подгруппы группы G содержатся в N, где q ¹ p. По лемме [15, I, 7.7], подгруппа N Ç P является силовской p-подгруппой в N. Ясно, что N Ç P_1 является максимальной подгруппой в N Ç P. Если N Ç P_1 ¹ 1, то лемма верна для подгруппы N. Действительно, пусть Q_1 – силовская q-подгруппа в N, где q ¹ p. Тогда Q_1 является силовской q-подгруппой и в G. Значит, $P_1Q_1 = Q_1P_1$. Тогда

$$P_1Q_1 \text{ Ç } N = (N \text{ Ç } P_1)Q_1 = Q_1(N \text{ Ç } P_1),$$

и поэтому условие леммы верно для N. Тогда, по выбору группы G, N p-разрешима. Если N Ç $P_1 = 1$, то очевидно, что группа N является p-разрешимой.

Рассуждая аналогично как и выше легко показать, что условие леммы верно для G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то, по выбору группы G, факторгруппа G/N p-разрешима. Это влечет, p-разрешимость G, что невозможно, ввиду выбора группы G. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство основной теоремы

Предположим, что это утверждение теоремы неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. По лемме 2, группа G p-разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Поэтому N либо p-группа, либо p'-группа. Доказательство теоремы разобьем на шаги:

1) *Факторгруппа G/N является p-сверхразрешимой для любой минимальной нормальной подгруппы N из G.*

Пусть $N \neq G$. Поскольку $|G/N| < |G|$, то необходимо лишь проверить, что условие верно для G/N. Действительно, ясно, что X/N является нормальной p-нильпотентной подгруппой в G/N. Прежде заметим, что PN/N – силовская p-подгруппа в G/N. Пусть P_1/N – произвольная максимальная в P/N подгруппа. Если N – p-группа, то P_1 является максимальной подгруппой в P и в этом случае условие леммы выполняется для G/N. Предположим теперь, что N – p'-группа. Тогда $P_1 = MN$, где M – некоторая максимальная подгруппа в P. Пусть Q/N – силовская q-подгруппа в G/N, где $p \neq q$. Тогда $Q = Q_1N$, где Q_1 – некоторая силовская q-подгруппа в Q. Согласно условию теоремы, M X-перестановочна с Q_1, и поэтому $P_1/N = MN/N$ X/N-перестановочна с $Q_1N/N = Q/N$, по лемме 2.1(3) из [13]. Так как $|G/N| < |G|$, то по выбору группы G, факторгруппа G/N p-разрешима. Это влечет p-разрешимость G. Так как $|G/H| < |G|$, то, по выбору группы G, имеем 1).

2) *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа N и $F(G)=1$.*

Это прямо вытекает из 1) и того хорошо известного факта, что класс всех p-сверхразрешимых групп замкнут относительно образования подпрямых произведений, и всегда из p-сверхразрешимости факторгруппы $G/F(G)$ следует p-сверхразрешимость самой группы G.

3) *Минимальная нормальная подгруппа N группы G является абелевой p-группой и $X \leq P$.*

Предположим, что это не так и пусть L – минимальная нормальная в N подгруппа. Если L – абелева группа, то p не делит $|N|$, что в силу 1) влечет p-сверхразрешимость группы G. Значит, L – простая неабелева группа. Применяя теперь 2), получаем $X = 1$. Поскольку L является субнормальной подгруппой в G, то $P \cap L$ – силовская p-подгруппа в L. Предположим, что $P \cap L \neq P$ и пусть M – максимальная в P подгруппа, содержащая $P \cap L$. Согласно условию, $Q^xM = MQ^x$, где Q – силовская q-подгруппа в G, $q \neq p$ и x – некоторый элемент из X, и поэтому

$$Q^xM \cap L = (P \cap L)(Q^x \cap L)$$

для любой силовской q-подгруппы Q из G, $q \neq p$. Это означает, что в L имеются холловские $\{p, q\}$-подгруппы для всех q делящих порядок группы L. Последнее противоречит [16]. Таким образом, $P \subseteq L$ и поэтому условие теоремы переносится на L. В силу выбора группы G мы должны заключить, что $L = G$, что вновь приводит нас к противоречию с [16]. Так как по 2), $O_{p'} = 1$, то $O_{p'}(X) \leq O_{p'}(G)$. Это влечет $X \leq P$.

4) *$G=[N]M$, где M – p-сверхразрешимая максимальная в G подгруппа и $N = O_p(G)=C_G(N)=X$.*

Пусть $C=C_G(N)$. В силу 2), для некоторой максимальной в G подгруппы M имеет место $G = NM$. Понятно, что $N \cap M = 1$. Кроме того, в силу 1), подгруппа M p-сверхразрешима. Согласно 2), $M_G = 1$ и поэтому $C \cap M = 1$. Следовательно,

$$C = C \cap NM = N(C \cap M) = N.$$

Так как X содержится в централизаторе любого главного p-фактора группы G, то утверждение 4) верно.

5) *Заключительное противоречие.*

Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P, Q – силовская q-подгруппа группы G, где $q \neq p$. Если P – циклическая группа, тогда $|N| = p$, ввиду минимальности N, и поэтому G сверхразрешима(согласно 1)), противоречие. Следовательно, P – нециклическая и $PQ = QP$. Пусть

$T = PQ$. Понятно, что условие леммы справедливо для T. Предположим, что T ¹ G. Тогда, в силу выбора G, T – p-сверхразрешимая группа и поэтому P – нормальная в T подгруппа, что влечет P Í $C_G(N) = N$, что невозможно. Следовательно, $T = G = PQ$. Пусть M_p – силовская p-подгруппа в M и L – такая максимальная подгруппа в P, которая содержит M_p. Пусть D – силовская q-подгруппа в M. Тогда, очевидно, D является силовской подгруппой в G и поэтому, согласно условию, $LD^x = D^xL$. Но, M^x Í LD^x и поэтому, в силу максимальности M в G, $M^x = LD^x$. Но тогда $|G : M^x| = |G : M| = p$, что влечет $|N| = |G : M| = p$. Таким образом, в силу 4), из последнего вытекает p-сверхразрешимость группы G. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

In this work on the basis of concept of a X-permutable subgroup are received new haracterizations of p-soluble and p-supersoluble groups.
The key words: *X-permutable subgroup, p-soluble group, p-supersoluble group, p-nilpotent group, p-group, a Sylow subgroup, a normal subgroup.*

Список литературы

1. Huppert B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen // Arch. Math. 1961. V. XII. S. 161-169.
2. Srinivasan S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35, № 3. P. 210-214.
3. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter. 1992.
4. Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. 5. P.431-460.
5. Черников Н.С. Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. Киев: Наук. Думка. 1987.
6. Guo W., Shum K.P. and Skiba A.N. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups //SEAMS Bull Math. 2005. V. 29, №2. P.240-255.
7. Го В., Шам К.П., Скиба А.Н. G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп, // Сиб. мат. журнал. 2004. 45, №3. С.75-92.
8. Guo W., Shum K.P. and Skiba A.N. X-Semipermutable Subgroups.Gomel: Preprint/GGU im.F. Skoriny, №10, 2004.
9. Guo W., Shum K.P. and Skiba A.N. X-Permutable Subgroups, Gomel: Preprint/GGU im. F. Skoriny, №61, 2002.
10. Guo W., Shum K.P. and Skiba A.N. Criterions of Supersolubility for Products of Supersoluble Groups (to appear in Publicationes Math. Debreceen, 2005).
11. Al-Sheikahmad A. Finite groups with given c-permutable subgroups // Algebra and Discrete Math. 2004. №3. P.12-19.
12. Weinstein M. Beetween Nilpotent and Solvable. Passaic, N.J.: Polygonal Publishen House, 1982.
13. Skiba A. N. H-permutable subgroups // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины.- 2003.- №4(19). С.37-39.
14. Huppert B.Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.
15. Kegel O. Produkte nilpotener Gruppen // Arch. Math. 1961. Bd.12. S. 90-93.
16. Тютянов В.Н. К гипотезе Холла, Гомель: Препринт/ Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины. №111, 2001.

Об авторе

О.В. Нетбай - Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

УДК 517.53

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ СТЕПЕННОЙ РОСТ ВБЛИЗИ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

О.В. Охлупина

В работе получено полное описание класса субгармонических функций, характеристика Неванлинны которых имеет степенной порядок роста при приближении к единичной окружности.
Ключевые слова: *субгармоническая функция, характеристика Неванлинны, потенциал, гармоническая функция.*

Предварительные сведения

Введем следующие обозначения. Пусть $D=\{z:|z|<1\}$ - единичный круг на комплексной плоскости, Γ - его граница. Пусть $SH(D)$ - множество субгармонических в D функций.

Если функция $u\in SH(D)$, то символом $T(r,u)$ обозначим характеристику Р. Неванлинны субгармонической функции u (см. [1]):

$$T(r,u)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}u^{+}\left(re^{ij}\right)dj\ ,$$

где $0<r<1$, $u^{+}(z)=\max\{0,u(z)\}$.

Для $a>0$ рассмотрим класс $SH_a(D)$ функций u, субгармонических в единичном круге D, для которых справедлива следующая оценка $T(r,u)\le\frac{C_u}{(1-r)^a}$, $0\le r<1$, C_u - некоторая положительная константа, зависящая только от u.

При $a=0$ по классическому результату Р.Неванлинны класс $SH_0(D)$ совпадает с классом функций u, допускающих в единичном круге D следующее представление:

$$u(z)=\iint_D\log\left|\frac{z-z}{1-\bar{z}z}\right|dm(z)+\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{1-|z|^2}{\left|1-e^{-iq}z\right|^2}dy(q),\tag{1}$$

где $y(q)$ - функция ограниченной вариации на $[-p;p]$, мера $m(z)$ удовлетворяет условию $\iint_D(1-|z|)dm(z)<+\infty$.

При $a>0$ метод, применяемый Р.Неванлинной не проходит, так как функции класса $SH_a(D)$ могут не иметь граничных значений на единичной окружности.

Основная цель статьи – получить аналог представления (1) в случае произвольных $a>0$. Для этого введем еще несколько обозначений.

Пусть $z,z\in D,\ \ z\neq 0,\ \ b>-1$, тогда (см. [2]):

$$A_b(z,z)=\left(1-\frac{z}{z}\right)\exp\left\{-\frac{b}{p}\int_D\frac{\left(1-|t|^2\right)^b\log\left|1-\frac{t}{z}\right|}{\left(1-\bar{t}z\right)^{b+2}}dm_2(t)\right\}.\tag{2}$$

Символом $B_s^{1,\infty}$ обозначим класс О.Бесова на единичной окружности Γ, т.е.:

$$B_s^{1,\infty} = \left\{ y \in L_1[-p;p] : \int_0^1 \frac{\left\| \Delta_t^2 y \right\|_{L_1}}{t^s} dt < +\infty \right\},$$

где $\Delta_t^2 y\left(e^{iq}\right) = y\left(e^{i(q+t)}\right) - 2y\left(e^{iq}\right) + y\left(e^{i(q-t)}\right),\ q \in [-p;p],\ t \in [0;1]$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. Класс функций $SH_a(D)$ совпадает с классом функций u, допускающих следующее представление в D:

$$u(z) = \iint_D \log\left|A_b(z,z)\right| dm(z) + \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} \frac{y\left(e^{iq}\right)dq}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}} \right\}, \tag{3}$$

где $z \in D$, $y\left(e^{iq}\right)$ - произвольная вещественнозначная функция из класса $B_{b-a+1}^{1,\infty}$, $b > a - 1$, $a > -1$, $m(z)$ - неотрицательная борелевская мера в D, удовлетворяющая условию: $n(r) \le \frac{C_1}{(1-r)^{a+1}}$, где $n(r) = m(D_r)$.

Замечание. В случае, когда функция u имеет вид: $u(z) = \log\left|f(z)\right|$, где $z \in D$, f - аналитическая функция в D, представление, аналогичное представлению (3), получено в работе [3].

Доказательство вспомогательных утверждений

В этом разделе предположим, что $u(z)$ является субгармонической в D функцией, которая гармонична в некоторой окрестности точки ноль, причем $u(0) = 0$.

Следующая лемма установлена в работе [4].

Лемма 1. Пусть $z, z \in D,\ z \ne 0,\ b > -1$, $A_b(z,z)$ - вышеуказанный фактор в произведении М. М. Джрбашяна. Тогда справедлива оценка:

$$\ln\left|A_b(z,z)\right| \le C\left(\frac{1-|z|^2}{\left|1-\bar{z}z\right|}\right)^{b+2}. \tag{4}$$

Лемма 2. Пусть $u_k(z) \ge u_{k+1}(z)$, $z \in D$ - монотонно убывающая последовательность субгармонических функций, $u_k(z) \to u(z)$ в D. Тогда $\forall j \in C_0^\infty(D)$ выполняется равенство: $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{D'} j(z)\Delta u_k(z)dm_2(z) = \int_{D'} j(z)dm(z)$, где m - мера Рисса субгармонической функции u, $D' \subseteq D$, $\operatorname{supp} j \subset D'$.

Доказательство. Пусть $D' = D_r$, $0 < r < 1$. Используем представление Рисса:

$$u_k(z) = \int_{D_r} \ln|z - z|\Delta u_k(z)dm_2(z) + \int_{\partial D_r} \frac{\partial g}{\partial n}(z,z)u_k(z)ds$$

$$u(z) = \int_{D_r} \ln|z - z|dm(z) + \int_{\partial D_r} \frac{\partial g}{\partial n}(z,z)u(z)ds.$$

Поэтому $\forall j \in C_0^\infty(D_r)$ имеем:

$$\int_{D_r}\left(u(z)-u_k(z)\right)\Delta j(z)\,dm_2(z)=$$

$$=\int_{D_r}\left(\int_{D_r}\ln|z-z|\,dm(z)-\int_{D_r}\ln|z-z|\Delta u_k(z)\,dm_2(z)\right)\Delta j(z)\,dm_2(z)+$$

$$+\int_{D_r}\left(\int_{\partial D_r}\frac{\partial g}{\partial n}\left(u(z)-u_k(z)\right)ds\right)\Delta j(z)\,dm_2(z)=I_1+I_2$$

Докажем, что $I_2\to 0$ при $k\to+\infty$.

$$|I_2|\le\int_{D_r}\int_{\partial D_r}\left|\frac{\partial g}{\partial n}\right|\left(u_k(z)-u(z)\right)|j(z)|\,dm_2(z)$$

Так как разность $u_k(z)-u(z)\ge 0$ и монотонно стремится к нулю, то:

$f_k(z)=\left|\frac{\partial g}{\partial n}\right|(u_k-u)$ монотонно стремится к нулю. По теореме Леви (см. [5]):

$I_2\to 0,\quad k\to\infty$. Таким же образом, $\int_{D_r}|j(z)|\left(u_k(z)-u(z)\right)dm_2(z)\to 0$. Следовательно,

$I_2\to 0$ при $k\to\infty$. Т.е.

$$\int_{D_r}\left(\int_{D_r}\ln|z-z|\Delta j(z)\,dm_2(z)\right)dm(z)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{D_r}\Delta u_k(z)\left(\int_{D_r}\ln|z-z|\Delta j(z)\,dm_2(z)\right)dm_2(z)\qquad(5)$$

По следствию из формулы Грина:

$$\int_{D_r}\ln|z-z|\Delta j(z)\,dm_2(z)=j(z),\quad\forall j\in C_0^{\infty}(D_r).$$

Используя равенство (5), получим:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{D_r}j(z)\Delta u_k(z)\,dm_2(z)=\int_{D_r}j(z)\,dm(z).$$

Что и доказывает лемму.

Лемма 3. Пусть $u\in SH_a(D)$, $D_r=\{z:|z|<r\}$, $0<r<1$, $n(r)=m(D_r)$. Тогда имеет место оценка:

$$n(r)\le\frac{C_1}{(1-r)^{a+1}}.\qquad(6)$$

Доказательство. Пусть сначала $u\in SH_a(D)\,\mathbf{I}\,C^{(2)}(D)$. Δu - лапласиан функции u, $n(r)=\int_0^r\int_{-p}^{p}\Delta u\left(te^{ij}\right)dj\,tdt$, $0<r<1$.

Рассмотрим круг радиуса r : $0<r<1$. Тогда имеет место следующее равенство (см. [6], с. 274):

$$r^{2}\int_{-p}^{p}u\left(re^{ij}\right)dj=\int_{-p}^{p}\int_{0}^{r}\ln\frac{r}{r}\Delta u\left(re^{ij}\right)rdrdj\ . \qquad (7)$$

Так как $u(0)=0$, то, по теореме о среднем, $\int_{-p}^{p}u\left(re^{ij}\right)dj\geq 0$, а также, учитывая что $u(z)\leq u^{+}(z)$, получим:

$$\int_{-p}^{p}\int_{0}^{r}\ln\frac{r}{r}\Delta u\left(re^{ij}\right)rdrdj\leq r^{2}\int_{-p}^{p}u^{+}\left(re^{ij}\right)dj\leq\int_{-p}^{p}u^{+}\left(re^{ij}\right)dj\ .$$

Учитывая, что $T(r,u)=\dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p}u^{+}\left(re^{ij}\right)dj\leq\dfrac{C}{(1-r)^{a}}$, $0\leq r<1$, получим следующую оценку:

$$\int_{-p}^{p}\int_{0}^{r}\ln\frac{r}{r}\Delta u\left(re^{ij}\right)rdrdj\leq\int_{-p}^{p}u^{+}\left(re^{ij}\right)dj\leq\frac{C}{(1-r)^{a}}\ . \qquad (8)$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства.

$$\int_{-p}^{p}\int_{0}^{r}\ln\frac{r}{r}\Delta u\left(re^{ij}\right)rdrdj=\int_{0}^{r}\ln\frac{r}{r}\int_{-p}^{p}\Delta u\left(re^{ij}\right)dj=$$

$$=\int_{0}^{r}\ln\frac{r}{r}d\left(\int_{0}^{r}\int_{-p}^{p}\Delta u\left(te^{ij}\right)dj\,tdt\right)=\ln\frac{r}{r}\int_{0}^{r}\int_{-p}^{p}\Delta u\left(te^{ij}\right)dj\,tdt\Bigg|_{0}^{r}+$$

$$+\int_{0}^{r}\frac{1}{r}\left(\int_{0}^{r}\int_{-p}^{p}\Delta u\left(te^{ij}\right)dj\,tdt\right)dr=\int_{0}^{r}\frac{1}{r}\left(\int_{0}^{r}\int_{-p}^{p}\Delta u\left(te^{ij}\right)dj\,tdt\right)dr$$

Учитывая, что $m(D_{r})=\int_{0}^{r}\int_{-p}^{p}\Delta u\left(te^{ij}\right)dj\,tdt=n(r)$, а также оценку (8), получим: $\int_{0}^{r}\dfrac{n(r)}{r}dr\leq\dfrac{C}{(1-r)^{a}}$. Оценим снизу интеграл в левой части последнего неравенства:

$$\frac{C}{(1-r)^{a}}\geq\int_{0}^{r}\frac{n(r)}{r}dr\geq\int_{r-\frac{1-r}{2}}^{r}n(r)dr\geq n\left(r-\frac{1-r}{2}\right)\left(\frac{1-r}{2}\right)=n\left(\frac{3r-1}{2}\right)\left(\frac{1-r}{2}\right)$$

С помощью замены $\dfrac{3r-1}{2}=r$ получим, что $n(r)\leq\dfrac{C_{1}}{(1-r)^{a+1}}$. Покажем, что из последнего неравенства следует сходимость интеграла

$I=\int_{0}^{1}(1-t)^{b+2}dn(t)$ при $b>a-1$. Пусть R - произвольное число из интервала $(0;1)$.

Проинтегрируем интеграл $I'=\int_{0}^{R}(1-t)^{b+2}dn(t)$ по частям. Тогда будем предполагать, что R - точка непрерывности функции.

$$I' = \int_0^R (1-t)^{b+2} dn(t) = (1-t)^{b+2} n(t)\Big|_0^R + (b+2)\int_0^R (1-t)^{b+1} n(t)\,dt \le$$

$$\le (1-R)^{b+2} n(R) + C(b)\int_0^R \frac{(1-t)^{b+1}}{(1-t)^{a+1}}dt \le C\frac{(1-R)^{b+2}}{(1-R)^{a+1}} + C(b)\int_0^R \frac{(1-t)^{b+1}}{(1-t)^{a+1}}dt =$$

$$= C(1-R)^{b-a+1} + C_1.$$

Очевидно, что при $R \to 1-0$ $I' = \int_0^R (1-t)^{b+2} dn(t)$ остается ограниченным, поэтому интеграл $I = \int_0^1 (1-t)^{b+2} dn(t)$ сходится.

То есть для $u \in SH_a(D) \,\mathbf{I}\, C^{(2)}(D)$ лемма доказана.

Для доказательства леммы в общем случае применим лемму 2. Рассмотрим последовательность бесконечно дифференцируемых субгармонических функций $u_k(z)$, которые, убывая, сходятся к субгармонической функции $u(z)$ внутри D при $k \to +\infty$ (см. [7], с. 51). При этом Δu_k слабо сходятся к dm, где m - представляющая мера в разложении Рисса субгармонической функции u (см. [8]).

Применим формулу (7) к данной последовательности:

$$r^2 \int_{-p}^{p} u_n\left(r e^{ij}\right) dj = \int_{-p}^{p}\int_0^r \ln\frac{r}{r}\Delta u_n\left(re^{ij}\right) r\,dr\,dj .$$

Применяя рассуждения, изложенные выше и формулу Иенсена (см., например, [1], §3.9), получим: $n(r) \le \dfrac{C}{(1-r)^{a+1}}$.

Следовательно, и $\int_0^1 (1-t)^{b+2} dn(t) < +\infty,\ b > a-1$. Что и требовалось доказать.

Лемма 4. Пусть u - произвольная субгармоническая функция в D, допускающая представление: $u(z) = \iint_D \log\left|A_b(z,z)\right| dm(z) + h(z)$, где $z \in D$, $b > a-1$, $a > -1$, $m(z)$ - неотрицательная борелевская мера в D, удовлетворяющая условию $n(r) \le \dfrac{C}{(1-r)^{a+1}}$, $n(r) = m(D_r)$, $D_r = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, $h(z)$ - гармоническая функция, для которой справедлива оценка: $\int_{-p}^{p} \left|h\left(re^{ij}\right)\right| dj \le \dfrac{C}{(1-r)^{a}}$. Тогда $u \in SH_a(D)$.

Доказательство. Пусть $V_b(z) = \int_D \ln\left|A_b(z,z)\right| dm(z)$.

Тогда $u(z) = V_b(z) + h(z)$.

Так как $u(z) \le u^+(z)$, а также, учитывая оценку из леммы 1, запишем:

$V_b(z) \le V_b^+(z) \le c\int\limits_D \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}z|} \right)^{b+2} dm(z)$. Тогда:

$$u^+(z) \le |h(z)| + V_b^+(z) \le |h(z)| + c\int\limits_D \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}z|} \right)^{b+2} dm(z)$$

Проинтегрируем обе части неравенства по j по отрезку $[-p;p]$:

$$\int\limits_{-p}^{p} u^+(re^{ij})dj \le \int\limits_{-p}^{p} |h(re^{ij})|dj + c\int\limits_{-p}^{p} \left(\int\limits_D \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}z|} \right)^{b+2} dm(z) \right) dj. \qquad (9)$$

Первый интеграл в левой части по предположению допускает оценку: $\int\limits_{-p}^{p} |h(re^{ij})|dj \le \frac{C}{(1-r)^a}$. Установим принадлежность потенциала V_b классу $SH_a(D)$, а именно: $\frac{1}{2p}\int\limits_{-p}^{p} V_b(re^{ij})dj \le \frac{C}{(1-r)^a}$.

Из неравенства (9) имеем:

$$\frac{1}{2p}\int\limits_{-p}^{p} V_b(re^{ij})dj \le \int\limits_{-p}^{p}\int\limits_D \frac{(1-|z|^2)^{b+2}}{|1-\bar{z}re^{ij}|^{b+2}} dm(z)$$

Положим $I = \int\limits_{-p}^{p}\int\limits_D \frac{(1-|z|^2)^{b+2}}{|1-\bar{z}re^{ij}|^{b+2}} dm(z)$. Изменяя порядок интегрирования и учитывая оценку:

$$\int\limits_{-p}^{p} \frac{dj}{|1-\bar{z}re^{ij}|^{b+2}} \le \frac{C(b)}{(1-|z|r)^{b+1}}, \qquad (10)$$

выводим:

$$I \le \int\limits_D \frac{(1-|z|^2)^{b+2}}{(1-r|z|)^{b+1}} dm(z) \qquad (11)$$

Приступим к оценке последнего интеграла. Для этого воспользуемся диадическим разбиением единичного круга, т.е. пусть $k \in Z_+$, $\Delta_k = \left\{ z : 1-\frac{1}{2^k} \le |z| < 1-\frac{1}{2^{k+1}} \right\}$. Тогда очевидно, что $D = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \Delta_k$. Поэтому из оценки (11) получаем:

$$I \le C(b)\sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\Delta_k} \frac{(1-|z|^2)^{b+2}}{(1-r|z|)^{b+1}} dm(z).$$

Пусть теперь r - произвольное число из $(0;1)$, $1-\frac{1}{2^n}\le r<1-\frac{1}{2^{n+1}}$, тогда

$$I\le\sum_{k=0}^{n}\int_{\Delta_k}\frac{\left(1-|z|^2\right)^{b+2}}{\left(1-r|\bar{z}|\right)^{b+1}}dm(z)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\Delta_k}\frac{\left(1-|z|^2\right)^{b+2}}{\left(1-r|\bar{z}|\right)^{b+1}}dm(z)=I_1+I_2$$

Рассмотрим первое слагаемое. В этом случае подынтегральное выражение допускает следующую оценку:

$$\frac{\left(1-|z|^2\right)^{b+2}}{\left(1-r|\bar{z}|\right)^{b+1}}\le\frac{\left(1-|z|^2\right)^{b+2}}{\left(1-|\bar{z}|\right)^{b+1}}\le 1-|z|.$$

С учетом этого и оценки $m(\Delta_k)\le\frac{C}{\left(1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right)^{a+1}}=C\cdot 2^{k(a+1)}$ получим:

$$I_1\le\sum_{k=0}^{n}\int_{\Delta_k}(1-|z|)dm(z)\le\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)m(\Delta_k)\le C\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)\cdot 2^{k(a+1)}=$$

$$=C\sum_{k=0}^{n}2^{ka}=C_1\cdot 2^{(n+1)a}\le\frac{C_1}{(1-r)^a} \tag{12}$$

Перейдем аналогично к оценке второго слагаемого I_2.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\Delta_k}\frac{\left(1-|z|^2\right)^{b+2}}{\left(1-r|\bar{z}|\right)^{b+1}}dm(z)\le C\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{-k(b+2)}\cdot 2^{k(a+1)}}{(1-r)^{b+1}}=$$

$$=C\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{-k(b+2-a-1)}}{(1-r)^{b+1}}=C\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{-k(b-a+1)}}{(1-r)^{b+1}}=C\frac{(1-r)^{b-a+1}}{(1-r)^{b+1}}=\frac{C}{(1-r)^a}$$

Следовательно, потенциал $V_b\in SH_a(D)$. Что и доказывает лемму, то есть $u\in SH_a(D)$.

Доказательство теоремы

Докажем теорему при условии, что функция u гармонична в некоторой малой окрестности точки ноль. При этом $u(0)=0$.

1) Необходимость. Пусть $u\in SH_a(D)$. Покажем сначала, что u допускает представление $u(z)=V_b(z)+h(z)$, где $\int_{-p}^{p}\left|h\left(re^{ij}\right)\right|dj\le\frac{C}{(1-r)^a}$ и $V_b\in SH_a(D)$.

Рассмотрим разность $u(z)-V_b(z)=h(z)$ и установим, что она является гармонической функцией.

Пусть D_r - круг радиуса r, $0<r<1$. По теореме Рисса для D_r:

$u(z)=V(z)+\int\limits_{D_r}\ln|z-z|dm(z)$, где $V(z)$ - гармоническая функция в $|z|<r$, $\int\limits_{D_r}\ln|z-z|dm(z)$ - субгармоническая функция.

Преобразуем выражение:

$$\ln|A_b(z,z)|=\ln\left(|A_b(z,z)|\cdot\left|\frac{z-z}{z-z}\right|\right)=\ln\frac{|A_b(z,z)|}{|z-z|}+\ln|z-z|;$$

$$\ln\frac{|A_b(z,z)|}{|z-z|}=\ln\left(\frac{1}{|z-z|}\cdot\left|1-\frac{z}{z}\right|\cdot\left|\exp\left\{-\frac{b}{p}\int\limits_D\frac{\left(1-|t|^2\right)^b\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|}{\left(1-\bar{t}z\right)^{b+2}}dm_2(t)\right\}\right|\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{|z-z|}\cdot\frac{|z-z|}{|z|}\cdot\exp\left(\mathrm{Re}\left\{-\frac{b}{p}\int\limits_D\frac{\left(1-|t|^2\right)^b\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|}{\left(1-\bar{t}z\right)^{b+2}}dm_2(t)\right\}\right)\right)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z|}+\mathrm{Re}\left\{-\frac{b}{p}\int\limits_D\frac{\left(1-|t|^2\right)^b\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|}{\left(1-\bar{t}z\right)^{b+2}}dm_2(t)\right\}$$

$$h(z)=u(z)-\int\limits_{D_r}\ln|A_b(z,z)|dm(z)=$$

$$=u(z)-\int\limits_{D_r}\left(\ln|z-z|+\ln\frac{1}{|z|}+\mathrm{Re}\left\{-\frac{b}{p}\int\limits_D\frac{\left(1-|t|^2\right)^b\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|}{\left(1-\bar{t}z\right)^{b+2}}dm_2(t)\right\}\right)dm(z)=$$

$$=u(z)-\int\limits_{D_r}\ln|z-z|dm(z)-\int\limits_{D_r}\ln\frac{1}{|z|}dm(z)-$$

$$-\int\limits_{D_r}\mathrm{Re}\left\{-\frac{b}{p}\int\limits_D\frac{\left(1-|t|^2\right)^b\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|}{\left(1-\bar{t}z\right)^{b+2}}dm_2(t)\right\}dm(z).$$

$\int\limits_{D_r}\ln\frac{1}{|z|}dm(z)<+\infty$. Это следует из того, что

$$V_b(0)>-\infty\Rightarrow+\infty>-V_b(0)=-\int\limits_D\ln|A_b(0,z)|dm(z)\geq\int\limits_D\ln\frac{1}{|z|}dm(z).$$

$\mathrm{Re}\left\{-\frac{b}{p}\int\limits_{D}\frac{\left(1-|t|^2\right)^b \ln\left|1-\frac{t}{z}\right|}{\left(1-\bar{t}z\right)^{b+2}}dm_2(t)\right\}$ - гармоническая функция. Учитывая, что r - произвольное из $(0;1)$, получаем, что $h(z)=u(z)-\int\limits_{D_r}\ln\left|A_b(z,z)\right|dm(z)$ является гармонической функцией в D.

Покажем, что гармоническая функция $h(z)$ удовлетворяет условию: $\int\limits_{-p}^{p}\left|h\left(re^{ij}\right)\right|dj \le \frac{C}{(1-r)^a}$.

Рассмотрим разность $h(z)=u(z)-\int\limits_{D}\ln\left|A_b(z,z)\right|dm(z)$.

Так как $u(z)\le u^+(z)$, то, согласно предыдущим рассуждениям, получим:

$$h^+(z)\le u^+(z)+V_b^+(z)\le u^+(z)+c\int\limits_{D}\left(\frac{1-|z|^2}{\left|1-\bar{z}z\right|}\right)^{b+2}dm(z).$$

Проинтегрируем обе части неравенства по j от $-p$ до p:

$$\int\limits_{-p}^{p}h^+\left(re^{ij}\right)dj \le \int\limits_{-p}^{p}u^+\left(re^{ij}\right)dj + c\int\limits_{-p}^{p}\left(\int\limits_{D}\left(\frac{1-|z|^2}{\left|1-\bar{z}z\right|}\right)^{b+2}dm(z)\right)dj .$$

Применим теорему о среднем значении: $-\infty<2p\,h(0)\le\int\limits_{-p}^{p}h\left(re^{ij}\right)dj$.

Далее воспользуемся тем, что $h(z)=h^+(z)-h^-(z)$:

$$2p\,h(0)\le\int\limits_{-p}^{p}\left[h^+\left(re^{ij}\right)-h^-\left(re^{ij}\right)\right]dj = \int\limits_{-p}^{p}h^+\left(re^{ij}\right)dj - \int\limits_{-p}^{p}h^-\left(re^{ij}\right)dj ,$$

$$2p\,h(0)+\int\limits_{-p}^{p}h^-\left(re^{ij}\right)dj \le \int\limits_{-p}^{p}h^+\left(re^{ij}\right)dj ;.$$

Учитывая, что $\left|h(z)\right|\le h^+(z)+h^-(z)$, получим:

$$\int\limits_{-p}^{p}\left|h\left(re^{ij}\right)\right|dj \le \int\limits_{-p}^{p}h^+\left(re^{ij}\right)dj + C_1.$$

В результате, $\int\limits_{-p}^{p}\left|h\left(re^{ij}\right)\right|dj \le \int\limits_{-p}^{p}u^+\left(re^{ij}\right)dj + c\int\limits_{-p}^{p}\left(\int\limits_{D}\left(\frac{1-|z|^2}{\left|1-\bar{z}z\right|}\right)^{b+2}dm(z)\right)dj + C_1$.

По условию теоремы, поскольку $u \in SH_a(D)$, то первый интеграл оценивается: $\int_{-p}^{p} u^+\left(re^{ij}\right)dj \le \frac{C}{(1-r)^a}$, а второй интеграл оценивается таким же образом по леммам 3 и 4.

Следовательно, $\int_{-p}^{p} \left|h\left(re^{ij}\right)\right| dj \le \frac{C}{(1-r)^a}$.

Остается показать, что $h(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} \frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}}dq\right\}$, где

$y \in H^1 \mathbf{I}\, B^s_{1,p}$, H^1 - класс Харди. Сначала заметим справедливость следующего равенства:

$$y(z) = \frac{1}{2pi}\int_{-p}^{p} \frac{y\left(e^{iq}\right)e^{iq}i\,dq}{e^{iq}-z} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} \frac{y\left(e^{iq}\right)dq}{\left(1-ze^{-iq}\right)};\ D^b \frac{1}{1-e^{-iq}z} = \frac{1}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}},$$

$z \in D$.

Пусть $y(z) = \int_0^1 (1-t)^{b-1} h(tz)\,dt,\ z \in D$. Покажем, что

$y\left(e^{iq}\right) \in B^{1,\infty}_{b-a+1}$ $(b > a-1)$. Достаточно получить оценку:

$$\int_{-p}^{p} \left|y^{(k)}\left(re^{iq}\right)\right| dq \le \frac{C}{(1-r)^{k-b+a-1}} \quad (0<r<1)$$, где $k \in N:\ k > b-a+1$.

Действительно:

$y^{(k)}(z) = \int_0^1 (1-t)^{b-1} t^k h^{(k)}(tz)\,dt$. Поэтому:

$$\int_{-p}^{p} \left|y^{(k)}\left(re^{iq}\right)\right| dq \le \int_0^1 (1-t)^b \int_{-p}^{p} \left|h^{(k)}\left(tre^{iq}\right)\right| dq\,dt.$$

Так как $\int_{-p}^{p} \left|h\left(re^{ij}\right)\right| dj \le \frac{C}{(1-r)^a}$ $(0<r<1)$, то

$\int_{-p}^{p} \left|y^{(k)}\left(re^{iq}\right)\right| dq \le C\int_0^1 \frac{(1-t)^b}{(1-rt)^{a+k}}dt$. Следовательно,

$\int_{-p}^{p} \left|y^{(k)}\left(re^{iq}\right)\right| dq \le \frac{C}{(1-r)^{k-b+a-1}}$. По известной теореме (см. [9], с. 198), так как функция

$y \in B^{1,\infty}_{b-a+1}$, а $B^{1,\infty}_{b-a+1} \subset H^1$, то $y(z) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} \frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)}dq$.

Поэтому $h(z)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}}dq\right\}$. Итак, если $u\in SH_a\left(D\right)$, то

$u(z)=\iint_D \log\left|A_b\left(z,z\right)\right|dm\left(z\right)+\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)dq}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}}\right\}$, т.е. верно представление (3).

Так как $y\in H^1$ и

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{\overline{y\left(e^{iq}\right)}}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}}dq=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\overline{y}\left(e^{iq}\right)dq=C_0\left(y\right),$$

то

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}}dq=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)+\overline{y}\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}}dq-C_0\left(y\right).$$

Следовательно, y - вещественнозначная функция, кроме того, мера m удовлетворяет условию теоремы по лемме 3.

2) Перейдем к доказательству достаточности. Оно следует непосредственно из предыдущего пункта и леммы 4.

Пусть функция u допускает представление (3). Покажем, что $u\in SH_a\left(D\right)$. Учитывая сказанное ранее, остается установить, что

$$h(z)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+1}}dq\right\}\in SH_a\left(D\right),\ \text{где } y\left(e^{iq}\right)\in B^{1,\infty}_{b-a+1}.$$

Для этого приведем лемму из работы [3]: если $u(z)$ - гармоническая в D и $v(z)$ - гармонически сопряжена с u, $v(0)=0$, то из

$$\int_{-p}^{p}\left|u\left(re^{ij}\right)\right|dj\le\frac{A}{\left(1-r\right)^a},\quad a>0,\ \ 0\le r<1\ \text{ вытекает }\ \int_{-p}^{p}\left|v\left(re^{ij}\right)\right|dj\le\frac{C\left(A\right)}{\left(1-r\right)^a}.$$

Воспользуемся следствием из этой леммы: Пусть $f(z)=u(z)+iv(z)$, $f\in H_1,\ v(0)=0,\ u\left(e^{ij}\right)\in B^{1,\infty}_g\ \ (g>0)$, тогда $f\left(e^{ij}\right)\in B^{1,\infty}_g$.

Из этого вытекает: $y=y_1+y_2,\ \ y_1\in H^1,\ y_2\in H^1$.

$$g(z)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{it}\right)}{\left(1-e^{-it}z\right)^{b+1}}dt=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\frac{\Delta_t^2 y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-it}z\right)^{b+1}}dt+2y\left(e^{iq}\right)-y\left(0\right).$$

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left|g\left(re^{iq}\right)\right|dq\le\frac{1}{4p^2}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\frac{\left|\Delta_t^2 y\left(e^{iq}\right)\right|}{\left|1-e^{-it}z\right|^{b+1}}dtdq+\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\left|y\left(e^{iq}\right)\right|dq+\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left|y\left(0\right)\right|dq.$$

Так как $\left|y\left(0\right)\right|\le\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\left|y\left(e^{iq}\right)\right|dq$, то

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left|g\left(re^{iq}\right)\right|dq \le C\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\frac{\left|\Delta_t^2 y\left(e^{iq}\right)\right|}{\left|1-e^{-it}r\right|^{b+1}}dtdq \le C_1\int_{-p}^{p}\frac{|t|^{b-a+1}}{\left|1-e^{-it}r\right|^{b+1}}dt \le \frac{C}{(1-r)^a},$$

$h(z)=\mathrm{Re}\{g(z)\}$.

Теорема доказана.

In the paper a characterization of some classes of subharmonic functions in the unit disk having sedate growth near the unit circle is obtained.
The key words: *subharmonic function, characteristic of Nevanlinna, potential, harmonic function.*

Список литературы

1. Хейман У. Субгармонические функции / У. Хейман, П. Кеннеди // М.: Мир. 1980.
2. Джрбашян, М.М. К проблеме представимости аналитических функций / М.М. Джрбашян // Сообщ. Института матем. и мех. АН Арм. ССР. Вып. 2. 1948.
3. Shamoyan, F.A., Shubabko, E.N. Parametrical representations of some classes of holomorphic functions in the disk // Operator Theory: Advanced and Applications. Vol. 113, 2000.
4. Шамоян Ф. А. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и Характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста / Ф.А. Шамоян // Известия АН Арм. ССР, математика, т. 13, №5. С. 405-422, 1978.
5. Сакс, С. Теория интеграла / С. Сакс // М.: изд-во Факториал-Пресс. С. 496. 2004.
6. Кусис. П. Введение в теорию пространств H^p. Пер. с англ. П. Кусис // М.: Мир. 1984.
7. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных / Л.И. Ронкин // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1971.
8. Ландкоф, Н.С. Основы современной теории потенциала / Н.С. Ландкоф // М.: «Наука». 1966.
9. Трибель Х. Теория функциональных пространств / Х. Трибель // М.: Мир. 1980.

Об авторе

О.В. Охлупина – асс. Брянской государственной инженерно-технологической академии, helga131081@yandex.ru

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ПРИМАРНЫМИ И МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

С.В. Путилов, Д.В. Передельская, Е.Е. Мошенко

В первой части исследуется конечная группа с условием, что каждая примарная подгруппа в этой группе является абнормальной или субнормальной. Такие конечные группы будем называть B_S -группами. Во второй части исследуются конечные $2MNS$ -группы. $2MNS$ -группой называется конечная группа, в которой каждая максимальная подгруппа является MNS -группой.
Ключевые слова: *конечная группа, примарная подгруппа, субнормальная подгруппа, абнормальная подгруппа,* MNS *-группа.*

Исследование конечных групп, в которых определенные системы подгрупп обладают некоторыми теоретико-групповыми свойствами, является одним из основных направлений в теории групп. В [1-6] устанавливается строение конечных групп с теми или иными системами подгрупп, обладающих свойствами субнормальности и абнормальности. В [6] рассматривается конечная группа G, в которой каждая примарная подгруппа является нормальной или абнормальной подгруппой в G. Такая конечная группа в [6] называется B-группой. Следуя [6] B_S-группой назовем конечную группу с условием, что каждая примарная подгруппа в этой группе является субнормальной или абнормальной. Первая часть данной работы посвящена исследованию конечных B_S-групп. Очевидно, что любая конечная B-группа является B_S-группой. Однако обратное утверждение неверно. Примером B_S-группы, не являющейся B-группой, служит знакопеременная группа A_4 на четырех символах.

В [7] М. Ашбахер вводит понятие скрученной подгруппы. Пусть K − подмножество с единицей в конечной группе G. Тогда K называется скрученной подгруппой в G, если для любых элементов x, y из K элемент xyx принадлежит K. В [8] подмножество K с единицей в конечной группе G называется скрученным подмножеством, если для любых элементов x, y из K элемент $xy^{-1}x$ принадлежит K. Так же в [8] конечную группу называют перекрученной группой, если каждое скрученной подмножество этой группы является подгруппой. В [8] описываются конечные минимальные неперекрученные группы, которые называются MNS-группами. Конечную группу, в которой каждая максимальная подгруппа является MNS-группой, назовем $2MNS$-группой. Во второй части данной заметки исследуются конечные $2MNS$-группы.

Приведем обозначения. Если G − конечная группа, то $|G|$ − порядок G; $\langle A, B\rangle$ − подгруппа G, порожденная подгруппами A и B группы G, т.е. наименьшая подгруппа группы G, содержащая A и B; $p(G)$ − множество всех простых чисел, каждое из которых делит $|G|$; $A \lhd G$ − подгруппа A нормальна в группе G; $A \rtimes B$ − полупрямое произведение подгруппы A на подгруппу B группы G, т.е. $A \lhd G$ и $A \cap B = 1$; 1 − по смыслу текста или единичный элемент, или единичная подгруппа; $|G : A|$ − индекс подгруппы A в группе G. Все неприведенные обозначения и определения можно найти в [9-10].

Лемма 1. Пусть G − конечная B_S-группа. Тогда справедливы утверждения:

(1) Любая подгруппа и факторгруппа группы G являются B_S-группами;

(2) В группе G каждая подгруппа субнормальна или абнормальна.

Доказательство. Первое утверждение доказывается непосредственной проверкой условий определения B_S-группы для произвольных подгруппы и факторгруппы группы G.

Пусть H − произвольная подгруппа из G. Если H содержит хотя бы одну примарную подгруппу абнормальную в G, то H абнормальна в G. Следовательно, все примарные подгруппы из H субнормальны в G. Тогда по теореме 7.3 [9] каждая примарная подгруппа из H субнормальна в H. Значит, подгруппа H нильпотентна. Если P и Q − соответственно силовская p-подгруппа и силовская q-подгруппа из H для простых p, q из $p(G)$, то по теореме 7.5 [9] p-холлова подгруппа $PQ = \langle P, Q\rangle$ из H будет субнормальной подгруппой в G, где $p = \{p, q\}$. Допустим, что PQ − собственная подгруппа в H. Тогда в H есть силовская r-подгруппа R и E-холлова подгруппа $PQR = \langle PQ, R\rangle$ из H по теореме 7.5 [9] субнормальна в G, где $E = \{p, q, r\}$. Продолжая этот процесс далее получим, что H субнормальна в G. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть G − конечная B_S-группа. Тогда любая нециклическая силовская p-подгруппа группы G нормальна в G, для $p \in p(G)$.

Доказательство. Пусть P − нециклическая силовская p-подгруппа из G. Тогда в P есть, по крайней мере, две максимальные подгруппы P_1 и P_2. Так как $P_i \subset N_G(P_i)$, $i = 1,2$, то

P_i будут неабнормальными подгруппами группы G. Значит, подгруппы P_i субнормальны в G, $i=1,2$. Тогда по теореме 7.5. [9] подгруппа $P=\langle P_1,P_2\rangle$ субнормальна в G, что влечет нормальность P в G. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть G − конечная B_S-группа. Тогда группа G разрешима.

Доказательство. По лемме 2 группа $G=A\leftthreetimes B$, где подгруппа A равна прямому произведению нециклических силовских подгрупп из G, а каждая силовская подгруппа из B будет циклической. Ясно, что факторгруппа G/A изоморфна подгруппе B, которая разрешима по теореме IV.2.9 [10]. Тогда из нильпотентности A следует разрешимость группы G. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть G − простая конечная B_S-группа. Тогда $|G|=p$, где p − простое число.

Доказательство. По лемме 3 группа G разрешима. Значит, G − простая абелева группа. Поэтому $|G|=p$ для некоторого простого числа p. Лемма 4 доказана.

Пример. Знакопеременная группа A_4 является B_S-группой, но не является сверхразрешимой группой. Так же A_4 не является дисперсивной по Оре группой.

Теорема 1. Конечная группа G является B_S-группой тогда и только тогда, когда группа G нильпотентна или факторгруппа $G/Z(G)$ будет p-нильпотентной группой с абнормальной силовской p-подгруппой порядка p и p-дополнением, совпадающим с коммутантом $G/Z(G)$, где $p\in p(G)$.

Доказательство. *Необходимость.* Так как по лемме 3 группа G разрешима, то в G есть нормальная максимальная подгруппа M. Тогда $|G:M|=p$, где $p\in p(G)$. Пусть Q − силовская q-подгруппа из M для простого числа $q\in p(M)/\{p\}$. Так как группа G является B_S-группой и подгруппа M нормальна в G, то подгруппа Q субнормальна в G. Поскольку подгруппа Q является силовской q-подгруппой в G, то Q нормальна в G. Тогда, если силовская p-подгруппа субнормальна в G, то группа G нильпотентна. Следовательно, силовская p-подгруппа абнормальна в G.

Пусть P − силовская p-подгруппа в группе G. Тогда по лемме 2 P − циклическая группа. Если H − подгруппа в G равная произведению всех нормальных силовских q-подгрупп из G для $q\in p(M)/\{p\}$, то по теореме Цассенхауза $G=H\leftthreetimes P$. Так как по теореме VI.12.2. [10] подгруппа P является $\mathfrak{N}$-проектором, то $G=G'\cdot P$, где G' − коммутант группы G. Поскольку факторгруппа G/H изоморфна P, то G/H абелева, откуда $G'\subseteq H$. Значит, $H=G'$.

Пусть $|P|>p$ и P_1 − максимальная подгруппа из P. Так как $P_1\subset N_P(P_1)$, то подгруппа P_1 субнормальна в G. Тогда существует цепь подгрупп $P_1<N_1<N_2<..<N_k=G$. Поэтому $P_1\subseteq O_p(N_1)\subseteq O_p(N_2)\subseteq..\subseteq O_p(N_{k-1})\subseteq O_p(G)\subset P$, откуда P_1 совпадает с $O_p(G)$. Тогда $P_1H=P_1\times H$, что влечет $P_1\subseteq Z(G)=Z$.

Пусть $1\neq x\in(Z\cap H)$. Так как $x\in C_G(P)\subseteq N_G(P)=P$, то пришли к противоречию с равенством $P\cap H=1$. следовательно, $Z\cap H=1$ и $P_1=Z$. Тогда $G/Z=(H\leftthreetimes P)/Z=(HZ/Z)\leftthreetimes(P/Z)$, где $|P/Z|=p$ и $HZ/Z\cong H/H\cap Z=H/1\cong H$. Кроме того, $(G/Z)'=G'Z/Z=HZ/Z$ и все доказано. Пусть $|P|=p$. Так как $C_G(P)=P$, то $Z\subset P$. Поэтому $Z=1$. Тогда $G/Z\cong G$. Поскольку группа G p-нильпотентна с p-дополнением, совпадающим с коммутантом группы G, и порядок силовской p-подгруппы равен простому числу p, то утверждение следует. Необходимость доказана. *Достаточность* очевидна. Теорема 1 доказана.

Определение. Конечная группа G называется минимальной не B_S-группой, если группа G не является B_S-группой, а любая собственная подгруппа в G будет B_S-группой.

Пример. Знакопеременная группа A_5 на пяти символах является неразрешимой минимальной не B_S-группой.

Рассмотрим конечные разрешимые минимальные не B_S-группы.

Лемма 5. Пусть G − конечная группа Шмидта с самонормализуемой ненормальной силовской подгруппой. Тогда G является B_S-группой.

Доказательство. Пусть G − группа из условия леммы 5. Тогда $p(G)=\{p,q\}$ и $G=P\leftthreetimes Q$, где P − нормальная силовская p-подгруппа в G, а Q − циклическая силовская q-подгруппа в G.Так как $Q=N_G(Q)$, то Q − ненормальная максимальная подгруппа в группе G и Q абнормальна в G. Поэтому P будет минимальной нормальной подгруппой в группе G. Ясно, что любая подгруппа из P субнормальна в G. Пусть Q_1 − максимальная подгруппа из Q. Тогда $P\times Q_1$ − максимальная нормальная подгруппа в G, откуда Q_1 нормальна в G. Следовательно, любая подгруппа из Q отличная от Q субнормальна в G. Получили, что G является B_S-группой. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть G − конечная группа Шмидта с несамонормализуемой ненормальной силовской подгруппой. Тогда G не является B_S-группой.

Доказательство. Так как ненормальная силовская подгруппа Q будет несамонормализуемой в конечной группе Шмидта G, то Q не является абнормальной в G. Подгруппа Q не может быть субнормальной в G по определению группы Шмидта. Следовательно, G не является B_S-группой. Лемма 6 доказана.

Теорема 2. Конечная разрешимая группа G, в которой каждая максимальная подгруппа нильпотентна, является минимальной не B_S-группой тогда и только тогда, когда G будет группой Шмидта, в которой ненормальная силовская подгруппа несамонормализуемая.

Доказательство. *Необходимость*. Так как по теореме 1 конечная нильпотентная группа является B_S-группой, то группа G ненильпотентна. Тогда G группа Шмидта. Следовательно, по лемме 5 ненормальная силовская подгруппа в G будет несамонормализуемой.

Достаточность. По теореме 1 конечная нильпотентная группа является B_S-группой. Поэтому в конечной группе Шмидта все максимальные подгруппы будут B_S-группами. По лемме 6 группа G не является B_S-группой. Значит, группа G − минимальная не B_S-группа. Теорема 2 доказана.

Лемма 7. Пусть G – конечная $2MNS$-группа. Тогда G разрешима.

Доказательство. Пусть G_2 – силовская 2-подгруппа в группе G и S –максимальная подгруппа в G, содержащая G_2. Если G_2 – собственная подгруппа в S, то G_2 включается в максимальную подгруппу группы S, которая по условию будет перекрученной группой. Тогда по лемме 2.2 [11] G_2 – перекрученная группа и по лемме 2.7 из [11] подгруппа G_2 циклическая. Тогда по теореме IV.2.8 [9] группа G 2-нильпотентна, а, следовательно, G разрешима.

Значит, $S=G_2$, то есть G_2 является максимальной подгруппой в G. Тогда по теореме 1 [8] $|S|=4$, откуда по лемме 15.2.4 [12] группа G 2-нильпотентна. Поэтому G разрешима. Лемма 7 доказана.

Пример. Элементарная абелева группа порядка 8 является $2MNS$-группой.

Теорема 3. Пусть G – конечная $2MNS$-группа. Тогда порядок группы G делится не более чем на два простых числа.

Доказательство. По лемме 7 группа G разрешима. Далее доказательство проводится непосредственной проверкой всех типов групп из теорем 1-3 в [8]. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть в конечной группе G каждая ненормальная максимальная подгруппа является перекрученной группой. Тогда группа G 2-замкнута или 2-нильпотентна.

Доказательство. Пусть силовская 2-подгруппа группы G нормальна в G. Тогда по определению группа G 2-замкнута. Следовательно, силовская 2-подгруппа ненормальна в G. Тогда она содержится в ненормальной максимальной подгруппе группы G. Так как все ненормальные максимальные подгруппы в G являются перекрученными группами, то по лемме 2.2 [11] силовская 2-подгруппа также будет перекрученной группой. Значит, по лемме 2.7 [11] силовская 2-подгруппа является циклической группой. Тогда по теореме IV.2.8 [9] группа G 2-нильпотентна. Теорема 4 доказана.

Следствие. Если в конечной группе G каждая ненормальная максимальная подгруппа является перекрученной группой, то G разрешима.

Доказательство. Так как конечная 2-замкнутая группа и конечная 2-нильпотентная группа разрешимы, то утверждение следует из теоремы 4. Следствие доказано.

In the first part of article we study a finite group in which each primary subgroup is either abnormal or subnormal. Such finite group is called B_S-group. The finite $2MNS$-groups are studied in the second part of article. The finite group in which each maximal subgroup is MNS-group, is called $2MNS$-group.

The key words: *finite group, subnormal subgroup, abnormal subgroup,* MNS*-group.*

Список литературы

1. Forster P. Finite groups all of whose subgroups are F-subnormal or F-subabnormal // J. Algebra. 1986. V. 103. P. 285-293.
2. Bauman S., Ebter G. A note on subnormal and abnormal chains // J. Algebra. 1975. V. 36. P.287-293.
3. Семенчук В. Н. Строение конечных групп с F-абнормальными или F-субнормальными подгруппами // Вопросы алгебры. Минск: Изд-во «Университетское», 1985. Вып. 2. С. 50-55.
4. Li S. F-subnormal and F-subabnormal chains in finite groups // Science in China. 1998. V. 41, N 11. P. 1121-1127.
5. Ли Ш., Ду Н. Конечные группы с F-субнормальными условиями // Сиб. матем. ж. 2008. Т. 49, N 2. С. 367-373.
6. Fattahi A. Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra. 1974. V. 28, N 1. P. 15-19.
7. Aschbacher M. Near Subgroups of finite groups // J. Gronp Theary. 1998. V. 1, N 2. P. 113-129.
8. Мыльников А.Л. Конечные минимальные неперекрученные группы // Вестн. Красноярск. гос. ун-та. 2005. N 1. С. 71-76.
9. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука. 1978.
10. Huppert B. Endliche Gruppen, I. Springer, 1967.
11. Мыльников А.Л. Конечные перекрученные группы // Сиб. матем. ж. 2007. Т. 48, N 2. С. 370-375.
12. Gorenstein D. Finite groups. Harper and Row, 1968.

Об авторах

С.В. Путилов – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, algebra@brgu.ru.

Е.Е. Мошенко, Д.В. Передельская – магистранты 6 курса Брянского государственного университет им. академика И.Г. Петровского, algebra@brgu.ru.

УДК 517.5

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПРАВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ СТЕПЕННОЙ РОСТ В БЕСКОНЕЧНОСТИ[1]

Е.Г. Родикова

В статье устанавливается асимптотическая теорема единственности в классе аналитических в правой полуплоскости функций, имеющих степенной рост в окрестности бесконечно удаленной точки.
Ключевые слова: *теорема единственности, асимптотическая теорема, полуплоскость, аналитические функции, степенной рост.*

Одним из важнейших свойств аналитических функций, не присущим произвольным непрерывным функциям комплексного переменного, является свойство единственности. Классическая теорема единственности для множества всех аналитических в заданной области функций играет существенную роль в общей теории функций и в функциональном анализе (см. [1], [2]). Хорошо известны асимптотические теоремы единственности в различных классах аналитических функций (см. [3], [4]). В частности, М.А. Евграфовым в [5] установлена

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в правой полуплоскости* Π_+ ($f(z)\in H(\Pi_+)$) *и непрерывна вплоть до мнимой оси, а* L *– какая-либо кривая, идущая из точки* $z=0$ *в бесконечность, оставаясь в правой полуплоскости. Если выполнены условия*

$$|f(z)|\le M, \operatorname{Re} z\ge 0,$$

и

$$\frac{\ln|f(z)|}{|z|}\to -\infty,\ z\to\infty,\ z\in L,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Сформулированная асимптотическая теорема единственности для правой полуплоскости в данной работе распространяется на функции, имеющие степенной рост в бесконечности, кроме того, получено довольно точное условие на мажоранту. Отметим, что метод доказательства основного результата существенно отличается от метода, применяемого в работе М.А. Евграфова. Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть функция* $f(z)\in H(\Pi_+)$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\ln|f(z)|\le |z|^a$, $a>1$, $z\in\Pi_+$;
2) $\ln|f(z)|\le -|z|^a\cdot v(|z|)$, $a>1$, $z=iy$, $y>0$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=c_a$, *где* $c_a>2a^2-1$, *то функция* $f(z)\equiv 0$.

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 09-01-97517).

Доказательство.

Предположим, что функция $f(z)$ отлична от тождественного нуля. Пусть $e>0$. Рассмотрим функцию $f_e(z)=f(z-e)$, аналитическую на множестве $\Pi_+^e=\{z:\operatorname{Re}z>-e\}$. Обозначим $r_1^e e^{iq_1^e},\dots,r_n^e e^{iq_n^e}$ - нули функции $f_e(z)$ в полукольце $K_{r,2R}=\{z\in\Pi_+:\ \ 0<r\le|z|\le 2R\}$. По формуле Карлемана [6] для правой полуплоскости

$$\sum_{0\le r_k^e\le 2R}\left(\frac{1}{r_k^e}-\frac{r_k^e}{(2R)^2}\right)\cos q_k^e=\frac{1}{p\cdot 2R}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\ln\left|f_e\left(2\mathrm{R}e^{iq}\right)\right|\cos q\,dq+$$

$$+\frac{1}{2p}\int_r^{2R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{(2R)^2}\right)\ln\left(\left|f_e(iy)\right|\cdot\left|f_e(-iy)\right|\right)dy-\operatorname{Im}\frac{1}{2p}\int_0^p\ln f_e\left(re^{iq}\right)\cdot\left(\frac{re^{iq}}{(2R)^2}-\frac{e^{-iq}}{r}\right)dq.$$

Обозначим остаток в формуле Карлемана через

$$A_r(f_e,2R)=-\operatorname{Im}\frac{1}{2p}\int_0^p\ln f_e\left(re^{iq}\right)\cdot\left(\frac{re^{iq}}{(2R)^2}-\frac{e^{-iq}}{r}\right)dq.$$

При $R\to+\infty$ функция $A_r(f_e,2R)=O(1)$.

Поскольку $0\le r_k^e\le 2R$, $-\frac{p}{2}\le q_k^e\le\frac{p}{2}$, то $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{r_k^e}-\frac{r_k^e}{(2R)^2}\right)\cos q_k^e\ge 0$, то есть левая часть формулы Карлемана неотрицательна. Значит, неотрицательна и правая ее часть:

$$0\le\frac{1}{2pR}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\ln\left|f_e\left(2\mathrm{R}e^{iq}\right)\right|\cos q\,dq+\frac{1}{2p}\int_r^{2R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\ln\left(\left|f_e(iy)\right|\cdot\left|f_e(-iy)\right|\right)dy+$$
$$+A_r(f_e,2R)$$

В условиях теоремы можно прейти к пределу при $e\to 0$. В итоге получим:

$$0\le\frac{1}{2pR}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\ln\left|f\left(2\mathrm{R}e^{iq}\right)\right|\cos q\,dq+\frac{1}{2p}\int_r^{2R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\ln\left(\left|f(iy)\right|\cdot\left|f(-iy)\right|\right)dy+ \tag{1}$$
$$+A_r(f,2R).$$

По условию 1) теоремы

$$\ln\left|f\left(2Re^{iq}\right)\right|\le\left|2Re^{iq}\right|^a,\ a>1,\ -\frac{p}{2}<q<\frac{p}{2} \tag{2}$$

и

$$\ln\left|f(-iy)\right|\le y^a,\ a>1,\ y>0. \tag{3}$$

По условию 2) теоремы

$$\ln\left|f(iy)\right|\le -y^a\cdot v(y),\ a>1,\ y>0. \tag{4}$$

С учетом оценок (2), (3), (4), неравенство (1) примет вид:

$$0\le\frac{1}{2pR}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}2^a\,\mathrm{R}^a\cos q\,dq+\frac{1}{2p}\int_r^{2R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\cdot\left(-y^a\cdot v(y)+y^a\right)dy+A_r(f,2R).$$

Это неравенство равносильно

$$0\le\frac{2^a\,\mathrm{R}^{a-1}}{p}+\frac{1}{2p}\int_r^{2R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\cdot y^a\left(1-v(y)\right)dy+A_r(f,2R).$$

Преобразуем правую часть полученного неравенства:

$$\frac{2^a\,\mathrm{R}^{a-1}}{p}+\frac{1}{2p}\int\limits_r^{2R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\cdot y^a\left(1-v(y)\right)dy+A_r\left(f,2R\right)=$$

$$=\frac{2^a\,\mathrm{R}^{a-1}}{p}+\frac{1}{2p}\int\limits_r^{2R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4R^2}\right)d\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt+A_r\left(f,2R\right)=$$

$$=\frac{2^a\,\mathrm{R}^{a-1}}{p}+\frac{1}{2p}\cdot\left(\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\cdot\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\Bigg|_r^{2R}+\int\limits_r^{2R}\frac{2}{y^3}\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy\right)+$$

$$+A_r\left(f,2R\right)=\frac{2^a\,\mathrm{R}^{a-1}}{p}+\frac{1}{2p}\cdot\left(0+2\int\limits_r^{2R}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy\right)+A_r\left(f,2R\right)=$$

$$=R^{a-1}\cdot\left(\frac{2^a}{p}+\frac{\frac{1}{p}\cdot\int\limits_r^{2R}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy}{R^{a-1}}\right)+A_r\left(f,2R\right).$$

Итак,

$$0\le R^{a-1}\cdot\left(\frac{2^a}{p}+\frac{\frac{1}{p}\cdot\int\limits_r^{2R}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy}{R^{a-1}}+\frac{A_r\left(f,2R\right)}{R^{a-1}}\right).\tag{5}$$

Обозначим $2R=x$ и вычислим

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\frac{1}{p}\cdot\int\limits_r^{2R}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy}{R^{a-1}}=\frac{1}{p}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_r^{x}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}.$$

По правилу Лопиталя

$$\frac{1}{p}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_r^{x}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^{y}t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}=\frac{2^{a-1}}{p\cdot(a-1)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}\int\limits_r^{x}t^a\left(1-v(t)\right)dt}{x^{a-2}}.$$

Снова применим правило Лопиталя:

$$\frac{2^{a-1}}{p\cdot(a-1)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_r^{x}t^a\left(1-v(t)\right)dt}{x^{a+1}}=\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a\left(1-v(x)\right)}{x^a}=\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1-v(x)\right).$$

Так как по условию теоремы $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=c_a$, то последнее равенство примет вид:

$$\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1-v(x)\right)=\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\left(1-c_a\right).$$

Значит,

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\frac{1}{p}\cdot\int\limits_r^{2R}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^y t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy}{R^{a-1}}=\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\left(1-c_a\right).$$

Таким образом, предел скобки при $R\to+\infty$

$$\left(\frac{2^a}{p}+\frac{\frac{1}{p}\cdot\int\limits_r^{2R}\frac{1}{y^3}\int\limits_r^y t^a\left(1-v(t)\right)dt\,dy}{R^{a-1}}+\frac{A_r\left(f,2R\right)}{R^{a-1}}\right)$$

существует и равен

$$\left(\frac{2^a}{p}+\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\left(1-c_a\right)\right). \qquad (6)$$

Докажем, что в условиях теоремы выражение (6) строго отрицательно.

Так как по условию $c_a>2a^2-1$, то

$$1-c_a<-2\cdot\left(a^2-1\right),$$

откуда

$$\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\left(1-c_a\right)<-\frac{2^{a-1}\cdot2\cdot\left(a^2-1\right)}{p\cdot\left(a^2-1\right)},$$

что равносильно

$$\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\left(1-c_a\right)<-\frac{2^a}{p}.$$

Поэтому выражение $\left(\frac{2^a}{p}+\frac{2^{a-1}}{p\cdot\left(a^2-1\right)}\cdot\left(1-c_a\right)\right)$ отрицательно.

Следовательно, предел справа в неравенстве (5) равен $-\infty$ - противоречие.

Полученное противоречие указывает на то, что наше предположение $f(z)\not\equiv0$ неверно, то есть функция $f(z)\equiv0$.

Теорема доказана.

Замечание. Условие $c_a>2a^2-1$ теоремы 2 существенно. На это указывает простой пример аналитической в правой полуплоскости функции $f(z)=\exp\left(z^2\right)$, которая на мнимой оси допускает оценку

$$\ln\left|f(z)\right|\le-|z|^2 .$$

Здесь $a=2,\quad c_2=1$. Как видим, указанное условие не выполняется, поэтому не выполняется и заключение теоремы.

Работа выполнена под руководством д. ф.-м. н., профессора Ф.А. Шамояна.

In this article the asymptotic uniqueness theorem for the class of analytic in the right half plane functions with power growth at infinity is established.

The key words: *uгniqueness theorem, asymptotic theorem, half plane, analytic functions, power growth.*

Список литературы

1. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. Изд. 4-е испр. и дополн. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 416 с.

2. Евграфов М. А. Аналитические функции. Изд. 2-е испр. и дополн. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 471 с.

3. Апресян С.А. Локализация идеалов и асимптотические теоремы единственности. – Матем. сб., 1978, т. 106 (148), №1 (5). – с. 1-34.

4. Никольский Н.К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа. – Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. - Л.: Наука, 1974, т. 120. – 272 с.

5. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. Изд. 3-е испр. и дополн. – М.: Наука, 1962. – 320 с.

6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632с.

Об авторе

Е.Г. Родикова - магистр 2-го курса Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, evheny@yandex.ru

УДК 517.956.35

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И.А. Рудаков

Получены результаты о существовании и гладкости периодического по времени решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами и однородными граничными условиями Дирихле на отрезке, если нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности.

Ключевые слова: *волновое уравнение, оператор Даламбера, периодическое по времени решение, задача Штурма-Лиувилля, теорема о неподвижной точке.*

1.Введение.

Рассматривается задача

$$p(x)u_{tt}-(p(x)u_x)_x=g(x,t,u),\quad 0<x<p,\ t\in R; \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(p,t)=0,\quad t\in R; \tag{2}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t),\quad 0<x<p,\ t\in R. \tag{3}$$

Здесь и всюду ниже $T=2p\dfrac{b}{a}$, где a,b есть взаимно простые натуральные числа, функция g является T - периодической по t. Заметим, что уравнение более общего вида

$$r(z)\,u_{tt}-(m(z)\,u_z)_z=h(z,t,u)$$

можно привести к виду (1) с помощью замены $z\to x$, где $x=\int_0^z\sqrt{\dfrac{r(s)}{m(s)}}ds$.

Задача о периодических решениях квазилинейного волнового уравнения с постоянными и переменными коэффициентами и различными граничными условиями исследованы в работах [1]-[12]. Целью данной работы является доказательство теорем о регуляризации обобщенных решений задачи (1)-(3). В работе [13] получены теоремы о регуляризации решений волнового уравнения с однородными граничными условиями 3-го рода. Будем предполагать, что

$$p(x)\in C^2[0,p],\quad p(x)>0\quad \forall x\in[0,p] \tag{4}$$

и либо

$$h_{\mathrm{p}}(x) > 0 \qquad \forall x \in [0,p\,], \tag{5}$$

либо

$$h_{\mathrm{p}}(x) < 0 \qquad \forall x \in [0,p\,]. \tag{6}$$

Здесь $h_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}\frac{p''}{p} - \frac{1}{4}\left(\frac{p'}{p}\right)^2$. Заметим, что условию (5) удовлетворяют, например, показательная функция и степенная функция $y = (C_1x + C_2)^a$ при $a \in (-\infty;0)\,\mathbf{U}\,(2,+\infty)$. Условию (6) удовлетворяют, например, степенная функция $y = (C_1x + C_2)^a$ при $a \in (0,2)$, а также выпуклые вверх функции.

2. Свойства линейной части уравнения.

Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде ряда Фурье по системе функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}j_n(x),\ \sqrt{\frac{2}{T}}j_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}}j_n(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right\}_{m,n,\in N}, \tag{7}$$

где $j_n(x)$ есть собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$-(p(x)j'(x))' = l\ p(x)j\ (x), \quad j\,(0) = j\,(p\,) = 0. \tag{8}$$

Обозначим через l_n собственное значение, соответствующие собственной функции $j_n(x)$. В (6) доказано, что при выполнении условий (4),(5) собственные значения l_n положительные: $l_n = m_n^2$ и существуют положительные константы b_0, b_1 такие, что

$$m_n = n + q_n, \tag{9}$$

где

$$0 < b_0\frac{1}{n} \le q_n \le b_1\frac{1}{n} \qquad \forall n \in N. \tag{10}$$

При выполнении условий (4), (6) собственные значения l_n также положительные: $l_n = m_n^2$ и в [9] показано, что существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$m_n = n - q_n, \tag{11}$$

где

$$0 < c_0\frac{1}{n} \le q_n \le c_1\frac{1}{n} \qquad \forall n \in N. \tag{12}$$

Обозначим буквой Ω цилиндр $\Omega = [0,p\,]\times R/(T\,Z)$. Пусть

$$D = \left\{\, u \in C^\infty(\Omega) \middle|\ u \text{ финитна по } x \text{ на } [0,p\,] \text{ при каждом } t\ \right\}.$$

Определим $\|u\| = \left(\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\, p(x)\,dx\,dt\right)^{0,5}$ $\forall u \in D$. Пространство $L_2(\Omega)$ является замыканием D по норме $\|\cdot\|$. Для функций $u,n \in L_2(\Omega)$ определим

$$(u,n) = \int\limits_\Omega u(x,t)n\,(x,t)\,p(x)\,dx\,dt.$$

Согласно теореме В.А. Стеклова можно считать, что система функций $\{j_n(x)\}$ является ортонормированной в $L_2(0,p\,)$ со скалярным произведением

$$(j\,,y\,) = \int\limits_{[0,p\,]} j\ (x)\ y\ (x)\ p(x)\,dx, \qquad j\,,y \in L_2(0,p\,).$$

Тогда система (7) является ортонормированной системой в $L_2(\Omega)$. Определим оператор $A_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ для которого $D(A_0) = D$ и $A_0 j = pj_{tt} - (pj_x)_x$ $\forall j \in D(A_0)$. Пусть $\overline{A}_0 j = \frac{1}{p} A_0 j$ $\forall j \in D(A_0)$. Обозначим $A = \overline{A}_0^*$ в $L_2(\Omega)$.

Система функций (7) является системой собственных функций операторов $\overline{A}_0$ и A с собственными значениями

$$m_{nm} = l_n - \left(\frac{a}{b} m\right)^2, \; n \in N, \; m \in Z_+. \;.$$

Обозначим $s(A) = \{ m_{nm} | (n,m) \in N \times Z_+ \}$, $N(A)$, $R(A)$ ядро и образ A соответственно. Здесь $Z_+ = N \mathbf{U} \{0\}$. Стандартно доказывается ([6]), что

а) оператор A-самосопряжен в $L_2(\Omega)$,

б) $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$,

в) $L_2(\Omega) = N(A) \oplus R(A)$.

Функция $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} j_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} m t + b_{nm} \sin \frac{a}{b} m t \right) \in D(A)$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} m_{nm}^2 \left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \right) < \infty$. При этом

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} m_{nm} j_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} m t + b_{nm} \sin \frac{a}{b} m t \right).$$

Обозначим $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$ - пространства Соболева, полученные замыканием пространств $C^\infty(\Omega)$ и D соответственно по норме $\|u\|_1^2 = \int\limits_\Omega \left(u^2 + u_x^2 + u_t^2 \right) p(x) dx\, dt$. Пусть $H_k(\Omega)$, $k \in N$ есть замыкание $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_k^2 = \sum\limits_{|s|=0}^{k} |D^s u|^2$, где $s = (s_1, s_2) \in Z_+ \times Z_+$, $s = s_1 + s_2)$, $D^s = \frac{\partial^{|s|}}{\partial x^{s_1} \partial t^{s_2}}$.

Функцию $u \in R(A)$ разложим в ряд Фурье по системе (7):

$u = \sum\limits_{m_{nm} \neq 0} j_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right)$ и определим обратный оператор

$$A^{-1} : R(\mathrm{A}) \to R(A), \quad A^{-1} u = \sum_{m_{nm} \neq 0} \frac{1}{m_{nm}} j_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right)$$

Пусть восполнены условия (4),(6). Тогда собственные значения волнового оператора можно представить в виде:

$$m_{nm} = (n - q_n)^2 - \left(\frac{a}{b} m \right)^2 = a_{nm} + q_n^2 - 2nq_n, \text{ где } a_{nm} = \frac{1}{b^2} (nb - am)(nb + am).$$

Из (12) выведем $2nq_n \in [2c_0, 2c_1]$. Следовательно, $A^{-1} : R(A) \to R(A)$ является ограниченным оператором, поскольку 0 не может быть предельной точкой собственных чисел m_{nm} оператора A для функций из $R(A)$. Очевидно, что этот факт справедлив также, если выполнены условия (4), (5). Установим еще некоторые свойства оператора A^{-1}. Обозначим Λ_1 - ортонормированный базис в $N(A)$, Λ_2 -множество нормированных собственных функций оператора A с собственными значениями из отрезка $[-2c_1,-2c_0]$, Λ_3-множество нормированных собственных функций оператора A с собственными значениями из множества $(-\infty,-2c_1)\cup(-2c_0,0)\cup(0,+\infty)$. Тогда $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3$ есть полная ортонормированная система собственных функций A и собственные функции из Λ_3 имеют конечную кратность, а их собственные значения не имеют предельных точек. Для подмножества $M\subset L_2(\Omega)$ будем обозначать $\overline{M}$ и $L(M)$ соответственно замыкание M по норме $L_2(\Omega)$ и множество конечных линейных комбинаций элементов множества M . Обозначим $N_1=N(A)$, $N_2=\overline{L(\Lambda_2)}$, $N_3=\overline{L(\Lambda_3)}$. Также, как в работе [12] доказывается вполне непрерывность оператора $A^{-1}:N_3\to N_3$.

Лемма1. Для любого $k\in N$ и произвольной функции $f\in N_3\cap H_k(\Omega)$ имеет место включение $A^{-1}f\in H_{k+1}(\Omega)\cap H_1^0(\Omega)\cap C(\Omega)\cap N_3$ и

$$\left\|A^{-1}f\right\|_{k+1}\le A_k\|f\|_k, \qquad (13)$$

где константа A_k не зависит от f (При $k=0$ используется обозначение $\|\cdot\|_0=\|\cdot\|$).

Доказательство.

Обозначим

$$T_m=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{T}}, & m=0\\ \sqrt{\dfrac{2}{T}}, & m=1\end{cases},\qquad M=\{(n,m)\mid n\in N,\ m\in Z_+,\ \mu_{nm}\ne 0,\ \mu_{nm}\notin[-2c_2,-2c_1]\}.$$

Разложим $f\in N_3$ в ряд Фурье по системе (7):

$$f=\sum_M T_m\varphi_n(x)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt+b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right) \qquad (14)$$

Тогда

$$u=A^{-1}f=\sum_M\frac{T_m}{\mu_{nm}}\varphi_n(x)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt+b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right)$$

Докажем (13) при $k=0$. Оценим выражение $I=\dfrac{m}{|\mu_{nm}|^2}$, где $(n,m)\in M$. Имеем

$$I=\frac{m}{\left|n-q_n-\frac{a}{b}m\right|\left|n-q_n+\frac{a}{b}m\right|}=\frac{b^2m}{|nb-am-bq_n|\,|nb+am-bq_n|}.$$

Из (12) следует, что найдется такое натуральное число n_1, что $0<bq_n\le\frac{1}{2}$ $\forall n>n_1$. Заметим, что при $(n,m)\in M$ имеет место неравенство $nb-am\ne 0$, поэтому при $n>n_1$ имеет место оценка $|nb-am-bq_n|\ge|nb-am|-bq_n\ge\frac{1}{2}$ и

$$I\le\frac{2b^2m}{nb+am-0{,}5}\le\frac{2b^2m}{am+b-0{,}5}\le\frac{2b^2m}{am}=\frac{2b^2}{a}.$$

Обозначим $N_1=\{1,\dots,n_1\}$, $M_1=N_1\times Z_+$. Поскольку $\mu_{nm}\ne 0$ при $(n,m)\in M$, то $\mu_1=\min\limits_{M\cap M_1}|nb-am-bq_n|=\min\limits_{n\in N_1}\left(\min\limits_{m\in Z_+,(m,n)\in M}|nb-bq_n-am|\right)>0$, $nb+am-bq_n\ne 0$ и при каждом $n\in N_1$ существует $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m}{|nb+am-bq_n|}=\dfrac{1}{a}$. Следовательно, при каждом $n\in N_1$

множество $\left\{ \frac{m}{|nb+am-bq_n|} \middle| (m,n) \in M \right\}$. Поэтому выражение I ограничено при всех $(m,n) \in M$ некоторой константой B_1. Отсюда вытекает включение

$$v = \frac{a}{b} \sum_M T_m \frac{m}{m_{nm}} j_n(x) \left(-a_{nm} \sin \frac{a}{b} mt + b_{nm} \cos \frac{a}{b} mt \right) \in L_2(\Omega)$$

и $\| v \|^2 = \frac{a^2}{b^2} \sum_M T_m \frac{m^2}{m_{nm}^2} \left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \right) \le \frac{a^2}{b^2} B_1^2 \| f \|^2$. Таким образом, $u_t = v \in L_2(\Omega)$ и

$$\| u_t \|^2 \le \frac{a^2}{b^2} B_1^2 \| f \|^2 .$$

Из [14] следует, что

$$| j'_n(x) | \le C_0 m_n \quad \forall x \in [0,p], \ \forall n \in N ,$$

где константа C_0 не зависит от n. Отсюда и (11), (12) следует существование положительной константы C_1 такой, что

$$| j'_n(x) | \le C_0 n \quad \forall x \in [0,p], \ \forall n \in N . \qquad (15)$$

Рассмотрим выражение $j = \frac{n}{|m_{nm}|}$ при $(n,m) \in M$. При $n > n_1$ как и выше получим $J \le \frac{2b^2 n}{nb + am - \frac{1}{2}} \le \frac{2b^2 n}{bn - \frac{1}{2}} \le \frac{4b^2 - 2b + 1}{2b - 1}$. При $(n,m) \in N_1 \times M$ выведем

$$j \le \frac{b^2 n}{m_1 |nb + am - bq_n|} = \frac{b^2}{m_1} \max_{n \in N_1} \left(n \cdot \sup_{m \in Z_+ (m,n) \in M} \frac{1}{|nb + am - bq_n|} \right).$$

Отсюда, как и выше, вытекает существование константы B_2 такой, что $J \le B_2$ при $(n,m) \in M$. Рассмотрим функцию

$$h = \sum_{\mathrm{M}} \frac{T_m}{m_{nm}} j'_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right).$$

Система функций $j'_n(x)$ ортогональна в $L_2(0,p)$. Действительно, при $n \ne k$ имеем

$$\int_0^p j'_n(x) j'_m(x) p(x) dx = -\int_0^p j_m(x) (j'_n(x) p(x))_x dx = -l_n \int_0^p j_m(x) j_n(x) p(x) dx = 0 .$$

Поэтому система функций $\left\{ j'_n(x) \cos \frac{a}{b} mt, \ j'_n(x) \sin \frac{a}{b} mt \right\}$ ортогональна в $L_2(\Omega)$ и используя (15), получим

$$\| h \|^2 = \sum_M \frac{T_m^2}{m_{nm}^2} \left(a_{nm}^2 \| j'_n(x) \cos \frac{a}{b} mt \|^2 + b_{nm}^2 \| j'_n(x) \sin \frac{a}{b} mt \|^2 \right) \le \frac{T}{2} C_1 \cdot p \sum_M T_m^2 \frac{n^2}{m_{nm}^2} \left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \right) \le$$

$$\le C_1 p \, B_2^2 \sum_M \left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2 \right) = C_1 \cdot p \cdot B_2^2 \, \| f \|^2 .$$ Следовательно, $u_x = h \in L_2(\Omega)$ и

$\| u_x \|^2 \le C_1 \cdot p \cdot B_2^2 \| f \|^2$. Докажем, что $u = A^{-1} f \in H_1^0(\Omega)$. Обозначим

$$u_N = \sum_{\substack{n.m \in M \\ n,m \le N}} \frac{T_m}{m_{nm}} j_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b} mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b} mt \right).$$

Из сходимости рядов $\sum_M \frac{n^2}{m_{nm}^2}\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)$ и $\sum_M \frac{m^2}{m_{nm}^2}\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right)$ следует, что $(u_N)_t \to n$, $(u_N)_x \to h$, $u_N \to u$ в $L_2(\Omega)$. Следовательно, $u_N \to u$ в $H_1(\Omega)$. Поскольку $u_N \in H_1^0(\Omega)$, то $u \in H_1^0(\Omega)$. При $k=0$ неравенство (13) доказано.

Пусть $f \in N_3 \mathbf{I}\ H_1(\Omega)$ и выражена формулой (14). Докажем, что $f_t = g$, где

$$g = \frac{a}{b}\sum_M mT_m j_n(x)\left(-a_{nm}\sin\frac{a}{b}mt + b_{nm}\cos\frac{a}{b}mt\right).$$

Пусть $\{y_l\} \in D$ такая последовательность функций, что $y_l \to f$ в $H_1(\Omega)$, то есть $y_l \to f$, $(y_l)_t \to f_t$, $(y_l)_x \to f_x$ в $L_2(\Omega)$. Используя формулу интегрирования по частям, выведем

$$\int_\Omega y_l\, j_n(x)\cos\frac{a}{b}mt\, p(x)dxdt = -\frac{b}{am}\int_\Omega (y_l)_t j_n(x)\sin\frac{a}{b}mt\, p(x)dxdt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $l \to +\infty$, получим

$$\int_\Omega f\, j_n(x)\cos\frac{a}{b}mtp(x)\,dxdt = -\frac{b}{am}\int_\Omega f_t\, j_n(x)\sin\frac{a}{b}mt\, p(x)\,dxdt. \qquad (16)$$

Пусть a'_{nm}, b'_{nm} есть коэффициенты Фурье функции f_t по системе (7). Из (16) следует, что $a_{bm} = -\frac{b}{am}b'_{nm}$. Аналогично доказывается, что $b_{nm} = \frac{b}{am}a'_{nm}$. Поскольку $f_t \in L_2(\Omega)$, то $\sum_M\left((a'_{bm})^2+(b'_{nm})^2\right)<\infty$. Следовательно, $\sum_M m^2\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right) = \frac{b^2}{a^2}\sum_M\left((a'_{nm})^2+(b'_{nm})^2\right)<\infty$ и $f'_t = g$.

Из оценки

$$\|u_{tt}\|^2 = \frac{a^4}{b^4}\sum_M \frac{m^4}{m_{nm}^2}\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right) = \frac{a^4}{b^4}\sum_M \frac{m^2}{m_{nm}^2}m^2\left(a_{nm}^2+b_{nm}^2\right) \le \frac{a^4}{b^4}B_1^2\|f\|_1^2 < \infty$$

следует включение $u_{tt} \in L_2(\Omega)$.

Докажем, что $u_{xt} \in L_2(\Omega)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$Aw = f_t \qquad (17)$$

и докажем, что $w = u_t$. По доказанному

$$f_t = \frac{a}{b}\sum_W T_m m\, j_n(x)\left(-a_{nm}\sin\frac{a}{b}mt + b_{nm}\cos\frac{a}{b}mt\right).$$

Поэтому $w = \frac{a}{b}\sum_M \frac{T_m m}{m_{nm}} j_n(x)\left(-a_{nm}\sin\frac{a}{b}mt + b_{nm}\cos\frac{a}{b}mt\right)$. Таким образом, $w = n = u_t = A^{-1}f_t$. А так как $f_t \in L_2(\Omega)$, то согласно леммы 1 для $k=0$ имеем $u_{xt} = w_x \in L_2(\Omega)$ и $\|u\|_{xt} \le A_0\|f_t\| \le A_0\|f\|_1$.

Для доказательства включения $u_{xx} \in L_2(\Omega)$, воспользуемся методом П.Рабиновича из [2]. Возьмем произвольную функцию $z(x) \in C^\infty(R)$ такую, что supp $z \subset (0;p)$. Возьмем такое число $h \in R$, что $|h| < dist$ (supp z, $\{0,p\}$). Любую функцию $g \in L_2(\Omega)$ продолжим нулем вне полосы $[0,p]\times R$ и обозначим

$$g^h(x,t) = \frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h} \quad \text{при} \quad h \ne 0.$$

Докажем, что

$$\int_\Omega u\, A_0 y\; dx\, dt = (f, y) \quad \forall y \in D. \qquad (18)$$

Выше была найдена последовательность $u_N \in H_1^0 \cap C^2(\Omega)$ такая, что $u_N \to u$ в H_1. Разложим $\psi \in D$ в ряд Фурье по системе (7):

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_m \varphi_n(x)\left(\psi_{nm}^c \cos\frac{a}{b}mt + \psi_{nm}^s \sin\frac{a}{b}mt\right).$$

Отсюда и (14) выведем $(f,\psi) = \sum_M \left(a_{nm}\psi_{nm}^c + b_{nm}\psi_{nm}^s\right)$. Преобразуем левую часть (18):

$$\int_\Omega u\, A_0\psi\, dxdt = \int_\Omega u\psi_{tt}\,p(x)dxdt - \int_\Omega u\left(p(x)\psi_x\right)_x dxdt .$$

Поскольку $\psi \in H_1^0(\Omega)$, то $\psi_t = \frac{a}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} mT_m\varphi_n(x)\left(-a_{nm}\psi_{nm}^c \sin\frac{a}{b}mt + b_{nm}\cos\frac{a}{b}mt\right)$.

По доказанному $u_t = \frac{a}{b}\sum_M mT_m\varphi_n(x)\left(-a_{nm}\sin\frac{a}{b}mt + b_{nm}\cos\frac{a}{b}mt\right)$. Следовательно,

$$(u_t,\psi_t) = \frac{a^2}{b^2}\sum_M m^2\left(a_{nm}\psi_{nm}^c + b_{nm}\psi_{nm}^s\right). \qquad (19)$$

Интегрируя по частям, выведем $\int_\Omega u_N\psi_{tt}\,p(x)dxdt = -\int_\Omega (u_N)_t\psi_t\, p(x)dxdt$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\int_\Omega u\,\psi_{tt}\,p(x)\,dxdt = -\int_\Omega u_t\,\psi_t\,p(x)\,dxdt = (u_t,\psi_t)\,. \qquad (20)$$

Обозначим c_{nm}, d_{nm} коэффициенты Фурье функции ψ_x по ортонормированной системе

$$\left\{\frac{T_m}{\sqrt{\lambda_n}}\varphi_n'(x)\cos\frac{a}{b}mt, \frac{T_m}{\sqrt{\lambda_n}}\varphi_n'(x)\sin\frac{a}{b}mt\right\}.$$

(Заметим, что $\|\varphi_n'(x)\|^2 = \int_\Omega (\varphi_n'(x))^2\,p(x)\,dxdt = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_n'(x)p(x)\;d\varphi_n(x)\,dt =$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_n(x)\left(\varphi_n'(x)p(x)\right)_x\,dx\,dt = \lambda_n \int_\Omega (\varphi_n(x))^2 p(x)\,dxdt\,.)$$

Тогда $c_{nm} = \frac{T_m}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\psi_x, \varphi_n'(x)\cos\frac{a}{b}mt\right)$, $d_{nm} = \frac{T_m}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\psi_x, \varphi_n'(x)\sin\frac{a}{b}mt\right)$. Интегрируя по частям, выведем:

$$\psi_{nm}^c = T_m\int_\Omega \psi\,\varphi_n(x)\cos\frac{a}{b}mt\;p(x)\,dxdt = -\frac{T_m}{\lambda_n}\int_0^{2\pi}\cos\frac{a}{b}mt\int_0^{\pi}\psi\,(\varphi_n'(x)\,p(x))'\,dx\,dt =$$

$$= \frac{T_m}{\lambda_n}\int_0^{2\pi}\cos\frac{a}{b}mt\int_0^{\pi}\psi_x\,\varphi_n'(x)\,p(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}c_{nm}\,.$$

Поэтому $c_{nm} = \sqrt{\lambda_n}\cdot\psi_{nm}^c$. Аналогично, $d_{nm} = \sqrt{\lambda_n}\cdot\psi_{nm}^s$. Поскольку $\psi_x \in L_2(\Omega)$, то из неравенства Бесселя следует $\sum_{n,m\in N\times Z_+}\left(d_{nm}^2 + c_{nm}^2\right) < \infty$. Следовательно,

$$\sum_{(n,m)\in N\times Z_+}\left(\lambda_n\left(\psi_{nm}^c\right)^2 + \lambda_n\left(\psi_{nm}^s\right)^2\right) < \infty \qquad (21)$$

Рассмотрим последовательность

$$\psi_N = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{N} T_m\varphi_n(x)\left(\psi_{nm}^c\cos\frac{a}{b}mt + \psi_{nm}^s\sin\frac{a}{b}mt\right)$$

Запишем производную по x:

$$\left(y_N\right)_x = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{T_m}{\sqrt{l_n}} j_n'(x)\left(\sqrt{l_n}y_{nm}^c \cos\frac{a}{b}mt + \sqrt{l_n}y_{nm}^s \sin\frac{a}{b}mt\right). \qquad (22)$$

Обозначим $h_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_m j_n'(x)\left(y_{nm}^c \cos\frac{a}{b}mt + y_{nm}^s \sin\frac{a}{b}mt\right)$. Из (21), (22) следует, что $\left(y_N\right)_x \to h_1$ в $L_2(\Omega)$. Следовательно,

$$y_x = h_1. \qquad (23)$$

Интегрируя по частям, выведем $\int\limits_\Omega u_N\left(p(x)y_x\right)_x dxdt = -\int\limits_\Omega \left(u_N\right)_x y_x p(x)\,dxdt$. Переходя к пределу при $N\to\infty$, получим

$$\int\limits_\Omega u\left(p(x)y_x\right)_x dxdt = -\int\limits_\Omega h\cdot h_1\, p(x)\,dxdt = -\left(h,h_1\right) = -\sum_M \frac{l_n}{m_{nm}}\left(a_{nm}y_{nm}^c + d_{nm}y_{nm}^s\right).$$

Отсюда и (19), (20) выведем:

$$\int u A_0 y\ dxdt = \sum_M \frac{l_n}{m_{nm}}\left(a_{nm}y_{nm}^c + b_{nm}y_{nm}^s\right) - \sum_M \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{m^2}{m_{nm}}\left(a_{nm}y_{nm}^c + b_{nm}y_{nm}^s\right) =$$

$$= \sum_M \left(a_{nm}y_{nm}^c + b_{nm}y_{nm}^s\right) = (f, y).$$

Формула (18) доказана.

Преобразуем выражение

$$A_0(z\ j^{-h}) = z\ p(j^{-h})_{tt} - (p(z\ j^{-h})_x)_x =$$

$$= z\ p((j^{-h})_{tt} - (j^{-h})_{xx}) - (2pz_x + p_x z)(j^{-h})_x - (p_x z_x + p z_{xx})j^{-h}. \qquad (24)$$

Поскольку $z\ j^{-h} \in D$, то из (18) следует

$$\int\limits_\Omega u A_0\left(z j^{-h}\right)dxdt = \left(z\ j^{-h}, f\right) \qquad (25)$$

Обозначим $\square = \partial_{tt} - \partial_{xx}$. Из (24), (25) выведем

$$(z\ u, \square j^{-h}) = \left(z\ j^{-h}, f\right) + \int\limits_\Omega u\left(j^{-h}\right)_x (2pz_x + p_x z)\,dxdt + \int\limits_\Omega u j^{-h}(p_x z_x + p z_{xx})\,dxdt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Omega (z\ u\ p)^h\ \square j\ dx\,dt = \int\limits_\Omega (f\ z\ p)^h j\ dxdt +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left(u(2pz_x + p_x z_x)p\right)^h j_x\ dx\,dt + \int\limits_\Omega \left(u\left(p_x z_x + p z_{xx}\right)\right)^h j\ dx\,dt.$$

Воспользовавшись равенством $(z\ u\ p)^h = p(z\ u)^h + p^h(z\ u) + h\,p^h(z\ u)^h$, перепишем

$$\int\limits_\Omega (z\ u)^h p\,\square j\ dxdt = -\int\limits_\Omega p^h z\ u\,\square j\ dxdt - h\int\limits_\Omega p^h(z\ u)^h\ \square j\ dxdt + \int\limits_\Omega (f\ z\ p)^h j\ dxdt +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left(u\left(p_x z_x + p z_{xx}\right)\right)^h j\ dxdt.$$

Так как $(z\ u)^h \in H_1^0(\Omega)$, то интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_\Omega (z\ u)^h p\,\square j\ dxdt = -\left((z\ u)_t^h, j_t\right) + \left((z\ u)_x^h, j_x\right) + \int\limits_\Omega (z\ u)^h j_x p_x\ dxdt.$$

Следовательно,

$$\left((z\ u)_x^h, j_x\right) = \left((z\ u)_t^h, j_t\right) - \int\limits_\Omega (z\ u)^h j_x p_x\ dxdt + \int\limits_\Omega u_t j_t z\ p^h\ dxdt -$$

$$-\int_{\Omega}\left(z\ u\,p^{h}\right)_{x} j_{\,x}\,dxdt+h\int_{\Omega}(z\ u)_{t}^{h} j_{\,t} p^{h}\,dxdt-h\int_{\Omega}\left((z\ u)^{h} p^{h}\right)_{x} j_{\,x}\,dxdt+\int_{\Omega}(fz\ \ p)^{h} j\ dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\left(u(2pz_{\,x}+p_{x}z\ )p\right)^{h} j_{\,x}\,dxdt+\int_{\Omega}\left(u\left(p_{x}z_{\,x}+pz_{\,xx}\right)\right)^{h} j\ dxdt. \qquad (26)$$

Очевидно, что (26) справедливо $\forall j\in H_{1}^{0}(\Omega)$. Подставив в (26) $j=(z\ u)^{h}\in H_{1}^{0}(\Omega)$ и воспользовавшись включениями $z\ u_{t},\ u(2pz_{\,x}+p_{x}z\ )p,\ u\left(p_{x}z_{\,x}+pz_{\,xx}\right),$ $z\ u,\ u,\ f\ z\ \ p\in H_{1}(\Omega),\ (x,u)_{tx}\in L_{2}(\Omega),$ получим

$$\|(x\ u)_{x}^{h}\|^{2}\leq C_{3}\,\|(x\ u)_{x}^{h}\|+hC_{4}\|(x\ u_{x})^{h}\|^{2}+C_{5},$$

где константы C_{3}, C_{4}, C_{5} не зависят от h. Следовательно, $\|(x\ u)_{x}^{h}\|\leq C_{6}$, где C_{6} не зависит от h. Устремляя $h\to 0$, получим

$$(x\ u)_{xx}\in L_{2}(\Omega). \qquad (27)$$

Для любого $e\in\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ обозначим $I_{e}=[e,\ p-e]$. Пусть $z\in C^{\infty}(R)$, $\operatorname{supp}x\in(0,p)$ и $x\equiv 1$ на I_{e}. Если h достаточно мало, то $\operatorname{supp}z\,(x+h)\in I_{e}$ и из приведенных выше рассуждений следует, что $(x\ u)_{xx}\in L_{2}(\Omega)$. Обозначим $\Omega_{e}=I_{e}\times[0,p]$. Тогда $(x\ u)_{xx}\in L_{2}(\Omega_{e})$. Следовательно, $u_{xx}\in L_{2}(\Omega_{e})\quad\forall e>0$. Возьмем произвольную функцию $j\in C_{0}^{\infty}(\Omega)$ и произвольное $e\in(0,\ dist(\sup j\,,\ \partial\Omega))$. Из (18) следует

$$\int_{\Omega_{e}} u\,A_{0}j\ dxdt=(f,j\,). \qquad (28)$$

По доказанному $u\in H_{2}(\Omega_{e})$. Возьмем последовательность T - периодических по t функций $u_{N}\in C^{\infty}(\Omega_{e})$ такую, что $u_{N}\to u$ в $H_{2}(\Omega)$. Тогда,

$$\int_{\Omega_{e}} u\,A_{0}j\ dxdt=\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_{e}} u_{N}A_{0}j\ dxdt=\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_{e}} j\ \ A_{0}u_{N}\ dxdt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_{e}} j\left(p(x)(u_{N})_{tt}-p(x)(u_{N})_{xx}-p_{x}(u_{N})_{x}\right)dxdt=\int_{\Omega_{e}} j\left(p(x)u_{tt}-p(x)u_{xx}-p_{x}u_{x}\right)dxdt.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega_{e}} j\ \left(p\,u_{tt}-p\,u_{xx}-p_{x}u_{x}\right)dxdt=\int_{\Omega_{e}} fj\ \ p\,dxdt\qquad\forall j\in C_{0}^{\infty}(\Omega).$$

Поэтому $\ p\,u_{tt}-p\,u_{xx}-p_{x}\,u_{x}=f\ p,$

$$u_{xx}=u_{tt}-\frac{p_{x}}{p}u_{x}-f\ . \qquad (29)$$

Отсюда вытекает включение $u_{xx}\in L_{2}(\Omega)$ и оценка

$$\|u_{xx}\|\leq\|u_{tt}\|+\max\left|\frac{p_{x}}{p}\right|\cdot\|u_{x}\|+\|f\|\leq C_{7}\,\|f\|_{1},$$

где константа C_{7} не зависит от u. При $k=1$ теорема доказана.

Пусть $k=2,\ \ f\in H_{2}\ \mathbf{I}\ N^{\perp}$. По доказанному $u=A^{-1}f\in H_{2}\ \mathbf{I}\ H_{1}^{0}\ \mathbf{I}\ N^{\perp}\ \mathbf{I}\ C(\Omega)$. Рассмотрим уравнение (17) . Выше было показано, что $w=u_{t}$. Поскольку $f_{t}\in H_{1}$, то $w\in H_{2}$ и $\|u_{t}\|_{2}\leq A_{1}\|f_{t}\|_{1}\leq A_{1}\|f\|_{2}$. Следовательно, $u_{ttt},\ u_{txx},\ u_{ttx}\in L_{2}(\Omega)$. Дифференцируя (29), выведем $u_{xxx}=u_{ttx}-q\cdot u_{xx}-q_{x}\,u_{x}-f_{x}\in L_{2}(\Omega)$, где $q=\dfrac{p_{x}}{p}$. Таким образом, $u\in H_{3}\ \mathbf{I}\ H_{1}^{0}\ \mathbf{I}\ C_{1}(\Omega)\ \mathbf{I}\ N^{\perp}$ и $\|u\|_{3}\leq A_{2}\|f\|_{2}$, где константа A_{2} – не зависит от f и u. При $k=2$ теорема доказана.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Если $f \in H_k(\Omega)$, $k \in N$ и раскладывается в ряд (14) , то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} m^{2k}\left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right) < \infty \text{ и } \frac{\partial^k f}{\partial t^k} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_m m^k \sin mx\,(\pm a_{nm}\cos mt \pm b_{nm}\sin nt),$$

если k – четное число, или $\frac{\partial^k f}{\partial t^k} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_m m^k \sin mx(\pm a_{nm}\sin mt \pm b_{nm}\cos mt)$, если k - нечетное число.

Доказательство.

Пусть $k = 1$, $f \in H_1(\Omega)$. Докажем, что

$$\int_\Omega f\, j_n(x)\cos mt\, p(x)\,dxdt = -\frac{1}{m}\int_\Omega f_t\, j_n(x)\sin mt\, p(x)\,dxdt.$$

Пусть $\{f_l\} \in D$ такая последовательность функций, для которой $f_l \to f$ в $H_1(\Omega)$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_\Omega f_l j_n(x)\cos mt\, p(x)\,dxdt = -\frac{1}{m}\int_\Omega (f_l)_t j_n(x)\sin mt\, p(x)\,dxdt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получим требуемое равенство. Аналогично доказывается, что

$$\int_\Omega f\, j_n(x)\sin mt\, p(x)\,dxdt = \frac{1}{m}\int_\Omega f_t j_n(x)\cos mt\, p(x)\,dxdt.$$

Обозначим a'_{nm}, b'_{nm} коэффициенты Фурье функции f_t. Так как $f_t \in L_2(\Omega)$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left((a'_{nm})^2 + (b'_{nm})^2\right) < \infty$. Но по доказанному $a'_{nm} = m\,b_{nm}$, $b'_{nm} = -m\,a_{nm}$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} m^2\left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right) < \infty \text{ и } f_t = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_m j_n(x) m(-a_{nm}\sin mt + b_{nm}\cos mt).$$

При $k = 1$ лемма 2 доказана.

Пусть $k = 2$, $f \in H_2(\Omega)$. Поскольку $f_t \in H_1(\Omega)$, то по доказанному

$$f_{tt} = (f_t)_t = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} m^2 j_n(x)(a_{nm}\cos mt + b_{nm}\sin mt) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} m^4\left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right) < \infty.$$

При $k = 2$ лемма 2 доказана. Рассуждая аналогично, получим утверждение леммы при всех $k \in N$. Лемма 2 доказана.

Пусть $k = 3$ и $f \in H_3 \cap N^{\perp}$. Если f разлагается в ряд (14), то из леммы 2 следует

$$f_{tt} = -\frac{a^2}{b^2}\sum_M m^2 T_m j_n(x)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right).$$

Рассмотрим уравнение $Aw_1 = f_{tt}$. Докажем, что $w_1 = u_{tt}$. Имеем по определению

$$w_1 = -\frac{a^2}{b^2}\sum_M T_m \frac{m^2}{m_{nm}}\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right).$$

Поскольку $u = \sum_M T_m \frac{1}{m_{nm}}\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right) \in H_2$, то из леммы 2 вытекает

$u_{tt} = -\frac{a^2}{b^2}\sum_M T_m \frac{m^2}{m_{nm}}\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right)$ и, следовательно $u_{tt} = A^{-1} f_{tt}$.

Используя неравенство (13) при $k = 1$, выведем

$$\|u_{tt}\|_2 \le A_1 \|f_{tt}\|_1 \le A_1 \|f\|_3. \tag{30}$$

Поэтому

$$\|u_{tttt}\|^2+\|u_{ttxx}\|^2+\|u_{tttx}\|^2\le A_1\|f\|_3^2 .$$

Из (29), (30) выведем:

$$u_{xxxt}=u_{tttx}-q'(x)u_{xt}-q(x)u_{xxt}-f_{tx}\in L_2(\Omega),$$

$$u_{xxxx}=u_{ttxx}-qu_{xxx}-q''u_x-f_{xx}\in L_2(\Omega) \qquad (31)$$

и следовательно, существует положительная константа A_3 такая, что $\|u\|_4\le A_3\|f\|_3$. При $k=3$ теорема доказана.

Пусть $k=4$, $f\in H_4(\Omega)\cap N^{\perp}$. По доказанному

$$u\in H_4(\Omega)\cap H_1^0(\Omega)\cap C^2(\Omega)\cap N^{\perp}.$$

Поскольку $w_2=u_{ttt}$ является решением уравнения $Aw_2=f_{ttt}$, то $u_{ttttt},u_{ttttx},u_{tttxx}\in L_2(\Omega)$ и $\|u_{ttttt}\|^2+\|u_{ttttx}\|^2+\|u_{tttxx}\|^2\le A_1\|f_{ttt}\|_1\le A_1\|f\|_4$. Отсюда и (29) выведем $u_{xxxxt},u_{xxxxt}\in L_2(\Omega)$. Тогда из (31) следует

$$u_{xxxxx}=u_{xxxtt}-qu_{xxxx}-q'u_{xxx}-q'''u_x-q''u_{xx}-f_{xxx}\in L_2(\Omega).$$

Для $k=4$ лемма доказана. Аналогично лемма 1 доказывается для любого $k>4$. Лемма 1 доказана.

3. Квазилинейное волновое уравнение.

Запишем волновое уравнение в виде:

$$p(x)u_{tt}-(p(x)u_x)_x=g(x,t,u)+f(x,t),\qquad 0<x<\pi,\ t\in R. \qquad (32)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$g \text{ имеет период } T=2\pi\frac{b}{a} \text{ по } t; \qquad (33)$$

существуют константы $a,b\in R$ и $C>0$ также, что

$$a\le\frac{g(x,t,u)}{p(x)u}\le b\quad \forall|u|\ge C,\ \forall(x,t)\in\Omega; \qquad (34)$$

для некоторых положительных констант γ,M_1,M_2,M_3 выполнены неравенства

$$-\gamma\le\frac{1}{p(x)}g_u(x,t,u)\le M_1\quad \forall u\in R,\ \forall(x,t)\in\Omega; \qquad (35)$$

$$|g_t(x,t,u)|\le M_2|u|+M_3\quad \forall u\in R,\ \forall(x,t)\in\Omega. \qquad (36)$$

Определение. Функция $u\in L_2(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (32), (2), (3), если

$$\int_\Omega u(p\varphi_{tt}-(p\varphi_x)_x)\,dxdt=\int_\Omega(g(x,t,u)+f)\varphi\,dxdt\quad \forall\varphi\in D.$$

Теорема 3. Пусть $g\in C^2(\Omega\times R)$ и выполнены условия (4),(6),(33)-(35), в которых $C>0$, $[a,b]\cap\sigma(A)=\varnothing$, $0<\gamma<2c_0$. Тогда для любой функции $f\in H_1(\Omega)$ задача (32), (2), (3) имеет решение $u\in H_1(\Omega)\cap C(\Omega)$.

Доказательство.

Проверим выполнение условий теоремы 3.2 из [12]. Для функции $u \in L_2(\Omega)$ обозначим $B(u) = \dfrac{1}{p(x)} g(x,t,u)$. Функция $u \in L_2(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (32), (2), (3) тогда и только тогда, когда $-Au + Bu = -\dfrac{1}{p} f$.

Для любой функции $u \in N_2$ имеем $g \|u\|^2 \le c_0 \| u \|^2 \le (-Au, u) \le 2 c_1 \| u \|^2$. Возьмем число $l < a$ такое, что $[l, a]$ **I** $s\,(A) = \varnothing$. Обозначим $h(x,t,u) = \dfrac{g(x,t,u)}{p(x)} - l\, u$. Из (34) следует существование констант $C_1, C_2, \in (0, +\infty)$, $d \in (0, b - l)$ таких, что

$$h(x,t,u)\,u \ge -C_1, \quad | h(x,t,u) | \le g\, |u| + C_2 \quad \forall u \in R, \quad \forall (x,t) \in \Omega..$$

Следовательно,

$$(B(u) - l\ u,\ u) = \int_\Omega h(x,t,u)\, u\ p(x)\, dxdt = \int_\Omega | h(x,t,u)\, u + C_1 |\ p(x)\, dxdt - C_1 \int_\Omega p(x)\, dxdt \ge$$

$$\ge \int_\Omega | h(x,t,u) || u |\ p(x)\, dxdt - 2C_1 \int_\Omega p(x)\, dxdt \ge$$

$$\ge \frac{1}{g} \int_\Omega h^2(x,t,u) p(x)\, dxdt - \frac{1}{g} C_2 \int_\Omega | h(x,t,u) |\, p(x)\, dxdt - C_3 = \frac{1}{g} \| h(x,t,u) \|^2 -$$

$$- \frac{1}{g} C_2 \| h(x,t,u) \| - C_3 \ge \left(\frac{1}{g} - e^2 \right) \| h(x,t,u) \|^2 - C_3 - \frac{2}{e^2 g} C_2,$$

где $C_3 = 2C_1 \int_\Omega p(x)\, dxdt$, e -есть произвольная положительная константа. При достаточно малом e условия теоремы 3.2 работы [12] будут выполнены. Отсюда вытекает существование обобщенного решения $u \in L_2(\Omega)$ задачи (32),(2),(3). Покажем, что $u \in H_1(\Omega)$. Обозначим P_1, P_2, P_3 ортогональные в $L_2(\Omega)$ проекторы на подпространстве N_1, N_2, N_3 соответственно. Тогда $u = u_1 + u_2 + u_3$, где $u_i = P_i u,\ i \in \{1,2,3\}$. Спроектируем уравнение (32) на подпространства N_1, N_2, N_3:

$$P_1 \frac{1}{p} g(x,t,u) + P_1 \frac{1}{p} f = 0; \tag{38}$$

$$Au_2 = P_2 \frac{1}{p} g(x,t,u) + P_2 \frac{1}{p} f; \tag{39}$$

$$Au_3 = P_3 \frac{1}{p} g(x,t,u) + P_3 \frac{1}{p} f. \tag{40}$$

Разложим функцию $\frac{1}{p}f$ в ряд Фурье по системе (14) :

$$\frac{1}{p}f = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_m j_n(x)(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt). \qquad (41)$$

Из леммы 2 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} m^2(a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty \ . \qquad (42)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) < \infty , \qquad (43)$$

где $a_k = a_{(ak)(bk)}$, $b_k = b_{(ak)(bk).}$. Обозначим $f_i = P_i\frac{1}{p}f$, $i \in \{1,2,3\}$.

Тогда

$$f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} T_{bk} j_{ak}(a_k \cos akt + b_k \sin akt) . \qquad (44)$$

Из условий теоремы следует, что $(f_2)_t \in L_2(\Omega)$ и, кроме того

$$\sum_{k=1}^{\infty} |T_{bk} j_{ak}(a_k \cos ak + b_k \sin ak)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |T_{bk} j_{ak}|(|a_k| + |b_k|) \le C_5 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}k(|a_k| + |b_k|) \le$$

$$\le C_5\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Следовательно, $f_2 \in C(\Omega)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_{ek} j'_{ak}(a_k \cos akt + b_k \sin akt) . \qquad (45)$$

Из ортогональности системы $\{j'_n(x)\}$, равенства $||j'_n(x)||^2 = l_n$ и (43) вытекает сходимость в $L_2(\Omega)$ ряда (45). Следовательно, $(f_2)_x \in L_2(\Omega)$, $f_2 \in H_1(\Omega)$. Отсюда и конечномерности N_1 вытекает включение $f_3 \in H_1(\Omega)$. Тогда из леммы 1 получим $u_3 \in H_1^0(\Omega) \cap C(\Omega)$. Докажем, что $u_2 \in H_1^0(\Omega)$.

Для функции $g \in L_2(\Omega)$ будем обозначать далее $g^h = \frac{1}{h}(g(x,t+h) - g(x,t))$ при $h \ne 0$. Умножим равенство (39) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $(u_2^h)^{-h} \in N_2$:

$$(Au_2^h,\ u_2^h) = \int_{\Omega}(g(x,\ t,u))^h\, u_2^h\, dxdt + \int_{\Omega} f^h\, u_2^h\, dxdt .$$

Преобразуем $g(x,t,u)^h =$

$$=\frac{1}{h}(g(x,t+h,u(x,t+h))-g(x,t,u(x,t+h)))+\frac{1}{h}(g(x,t,u(x,t+h))-g(x,t,u(x,t)))=$$

$$=g_t(x,t(x,t,h),u(x,t+h))+g_u(x,t,q(x,t,h))u^h.$$

Следовательно,

$$((-A)u_2^h,\ u_2^h)+\int_\Omega g_u(x,t,q(x,t,h))(u_2^h)^2dxdt=-\int_\Omega(g_t(x,t(x,t,h),u(x,t+h))+f^h)u_2^h\,dxdt-$$

$$-\int_\Omega g_u(x,t,q(x,t,h))(u_1^h+u_3^h)\ u_2^h\,dxdt.$$

Из $(4'),(5')$ и определения N_2 выведем $a_0\|u_2^h\|^2\le C_7(1+\|u_1^h+u_3^h\|+\|f^h\|)\|u_2^h\|$,

где $a_0\in(0,\,2c_0-g)$, C_7 – некоторая положительна константа. Поскольку $f,\,u_1,\,u_3\in H_1(\Omega)$, то $\|u_1^h+u_3^h\|+\|f^h\|\le C_8$ для некоторой положительной константы C_8, не зависящей от h. Поэтому

$$\|u_2^h\|\le a_0^{-1}C_7(1+C_8)\qquad\forall h.$$

и, следовательно, существует $(u_2)_t\in L_2(\Omega)$. Стандартно (например, с помощью функции срезки доказывается, что если $u_2=\sum_{k=1}^{\infty}T_{ak}\,j_{ka}(x)(g_k\cos akt+d_k\sin akt)$, то

$$(u_2)_t=\sum_{k=1}^{\infty}T_{ak}\,aj_{ak}(x)((-kg_k)\sin akt+(kb_k)\cos akt).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(g_k^2+d_k^2)<\infty. \qquad (46)$$

Из этого неравенства точно также, как выше доказывается включение $u_2\in C(\Omega)$. Из ортогональности системы $\{j'_n(x)\}$, равенства $\|j'_n(x)\|^2=l_n$ и (46) вытекает равенство

$$(u_2)_x=\sum_{k=1}^{\infty}T_{ak}j'_{ak}(x)(g_k\cos akt+d_k\sin akt)\in L_2(\Omega).$$

Таким образом, $u_2\in H_1^0(\Omega)$, $u\in H_1^0(\Omega)$. Теорема доказана.

The existence and regularity of time-periodic weak solutions of a quasilinear wave equation with nonconstant coefficients and homogeneous boundary Dirichle conditions on the interval is proved when the nonlinear term satisfy the nonresonance conditions.

The кey words: *wave equation, d'Alembert operator, time-periodic solutions, Sturm-Liouville problem, fixed points theorem.*

Список литературы

1. H.Brezis, L.Nirenberg. Forced vibration for a nonlinear wave equations//Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31, No 1.- P. 1-30.

2. P.Rabinowitz. Free vibration for a semilinear wave equation//Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V 31, No 1.- P. 31-68.

3. П. И. Плотников . Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения// Мат. Сб. -1988.-Т. 136(178), N4(8). - С. 546-560.

4. E. Feireisl. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term// Chechosl. Math. J.- 1988.-V 38, No 1.- P.- 78-87.

5. И. А. Рудаков . Нелинейные колебания струны// Вести. Моск. Ун-та.,Сер.1. Матем. Механ. — 1984, № 2. — С. 9-13.

6. И.А. Рудаков. Периодическое по времени решение уравнения вынужденных колебаний струны с однородными граничными условиями //Дифференциальные уравнения.-2003. Т. 39. № 11. -С. 1556-1561.

7. И.А. Рудаков. Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями //Дифференциальные уравнения.-2005 Т. 41, № 10, -С. 1392-1399.

8. И.А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями// Известия РАН. Математика.- 2006- № 1, -С. 173-184.

9. И. А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями// Фундаментальная и прикладная математика.- 2006.- Т. 12, Вып. 5. - С. 189-201.

10. И. А. Рудаков. Периодическое по времени решение нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле// Известия Вузов. Математика.- 2007.- N. 2. С. 46-55.

11. И. А. Рудаков. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами// Математические заметки.- 2004.- Т. 76, вып.3. - С. 427-438.

12. И. А. Рудаков. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами// Математический сборник.- 2007.- Т. 198. N 7. - С. 91-108.

13. В.А. Кондратьев, И.А. Рудаков. О периодических решениях квазилинейного волнового уравнения// Математические заметки.-2009.- Т. 85.- вып. 1. С. 36-53.

14. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. -2003.- Москва.-УРСС.

Об авторе

И.А. Рудаков – док. проф. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, rudakov_bgu@mail.ru

УДК 512.542

О ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРАХ

М.М. Сорокина, С.М. Сазоненко, А.П. Симохина

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Отображение θ, выделяющее в каждой группе $G\in\mathfrak{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором (подгрупповым функтором на $\mathfrak{X}$), если $(\theta(G))^{\varphi}=\theta(G^{\varphi})$ для любого изоморфизма φ каждой группы $G\in\mathfrak{X}$. В настоящей работе изучаются свойства регулярных, транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов, а также свойства подгрупповых $\mathfrak{m}$-функторов на $\mathfrak{X}$.

Ключевые слова: *конечная группа, класс групп, подгрупповой функтор, регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор, транзитивный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор, $\mathfrak{m}$-функтор на $\mathfrak{X}$.*

В современной теории групп важное место занимает понятие подгруппового функтора. Функция q , выделяющая в каждой группе G из класса групп $\mathfrak{X}$ некоторую непустую систему

$q(G)$ её подгрупп, называется подгрупповым X-функтором, если $(q(G))^j = q(G^j)$, для любого изоморфизма j группы *G*. Теория подгрупповых функторов берет свое начало в работах А.Г. Куроша [1] и С. Амицура [2-3]. Основные положения теории подгрупповых функторов изложены в книге С.Ф. Каморникова, М.В. Селькина «Подгрупповые функторы и классы конечных групп» [4]. В [4] введены в рассмотрение многие важные виды подгрупповых функторов. Целью данной работы является изучение некоторых свойств регулярных подгрупповых X -функторов, в частности, регулярных транзитивных подгрупповых X -функторов и регулярных *m*-функторов на X.

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения, не приведенные в работе, можно найти в [4].

Подгрупповой X -функтор τ называется регулярным, если для любой X-группы *G* выполняются следующие условия:

1) из того, что *N* - нормальная подгруппа группы *G* и $M \in \tau(G)$, следует $MN/N \in \tau(G/N)$;

2) из $M/N \in \tau(G/N)$ следует $M \in \tau(G)$ [4].

Подгрупповой X-функтор θ называется решеточным, если для любой X-группы *G* из $H,K \in \theta(G)$ всегда следует, что $H \cap K \in \theta(G)$ и $\langle H,K \rangle \in \theta(G)$. Пусть τ – решеточный подгрупповой X-функтор. Подгрупповой X-функтор θ называется τ-идеальным X-функтором, если для любой X-группы *G* множество $\theta(G)$ является идеалом решетки $\tau(G)$, то есть $\theta(G) \subseteq \tau(G)$ и для любой X-группы *G* выполняются следующие условия:

1) если $A \in \theta(G)$, $X \in \tau(G)$ и $X \subseteq A$, то $X \in \theta(G)$;

2) если $A \in \theta(G)$, $B \in \theta(G)$, то $\langle A,B \rangle \in \theta(G)$ [4].

В следующей лемме рассматривается свойство регулярного τ-идеального подгруппового X-функтора.

Лемма 1. *Пусть* X *- непустой класс групп,* t *- решеточный подгрупповой* X *- функтор,* q *-* t *-идеальный подгрупповой* X *-функтор. Если* q *является регулярным подгрупповым* X *-функтором, то* $q = t$ *.*

<u>Доказательство.</u> Пусть q - регулярный подгрупповой X -функтор. Покажем, что $q = t$.

1) Проверим, что $q \le t$. Действительно, по определению t -идеального подгруппового X -функтора множество $q(G)$ является идеалом решетки $t(G)$, для любой группы $G \in$ X . Это означает, что $q(G) \subseteq t(G)$, для всех $G \in$ X . Следовательно, $q \le t$.

2) Покажем, что $t \le q$. Пусть $G \in$ X . Достаточно проверить, что $t(G) \subseteq q(G)$. Пусть $H \in t(G)$. Покажем, что $H \in q(G)$. Поскольку q - регулярный подгрупповой X - функтор, то $G \in q(G)$. Тогда из $G \in q(G)$, $H \in t(G)$ и $H \subseteq G$, ввиду t -идеальности подгруппового X -функтора q , получаем $H \in q(G)$. Таким образом, $t(G) \subseteq q(G)$ для всех $G \in$ X , и значит, $t \le q$.

Из 1) и 2) следует, что $q = t$. Лемма доказана.

Подгрупповой X-функтор, который выделяет для любой группы $G \in$ X множество, содержащее группу *G* и некоторые ее максимальные подгруппы, называется подгрупповым *m*-функтором на X. В следующей лемме рассматриваются свойства подгрупповых *m*-функторов на X. Напомним, что подгрупповой X-функтор, который выделяет для любой группы $G \in$ X множество, содержащее группу *G* и все ее максимальные подгруппы, называется максимальным подгрупповым *m*-функтором на X.

Лемма 2. *Пусть* X *- непустая формация,* q_1 *- максимальный m-функтор на* X*,* q_2 *- подгрупповой* X *-функтор и* $q = q_1 \cap q_2$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если q_2 *-* X *-субнормальный подгрупповой* X *-функтор, то* q *-* X *-нормальный m-функтор;*

2) если q_2 - $\mathfrak{X}$ -субабнормальный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор, то q - $\mathfrak{X}$ -абнормальный m-функтор;

3) если q_2 - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор, то q - регулярный m-функтор.

Доказательство. 1) Пусть q_2 - $\mathfrak{X}$ -субнормальный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор. Покажем, что q - $\mathfrak{X}$ -нормальный *m*-функтор. Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $H \in q(G)$. Покажем, что либо a) $H = G$, либо b) H - $\mathfrak{X}$ -нормальная максимальная подгруппа группы G. Так как $H \in q(G) = q_1(G) \cap q_2(G)$, то $H \in q_1(G)$ и $H \in q_2(G)$. Поскольку $H \in q_1(G)$ и q_1 - максимальный *m*-функтор, то либо $H = G$, либо $H < \cdot G$ (I). Так как $H \in q_2(G)$ и q_2 - $\mathfrak{X}$ -субнормальный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор, то либо $H = G$, либо существует максимальная цепь группы G вида $H = H_0 \subset \ldots \subset H_n = G$, такая что $H_i^{\mathfrak{X}} \subseteq H_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ (II). Из пунктов (I) и (II) получаем, что возможны следующие случаи:

(1) $H = G$, и значит, H удовлетворяет условию a);

(2) существует максимальная цепь группы G вида $H = H_0 < \cdot H_1 = G$, где $G^{\mathfrak{X}} \subseteq H$, то есть H - $\mathfrak{X}$ -нормальная максимальная подгруппа группы G, и значит, H удовлетворяет условию b). Из (1) – (2) следует, что q - $\mathfrak{X}$ -нормальный *m*-функтор.

Пусть q_2 - $\mathfrak{X}$ -субабнормальный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор. Покажем, что q - $\mathfrak{X}$ -абнормальный *m*-функтор. Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $H \in q(G)$. Покажем, что либо $H = G$, либо H - $\mathfrak{X}$ -абнормальная максимальная подгруппа группы G. Так как $H \in q(G)$, то $H \in q_1(G)$ и $H \in q_2(G)$. Поскольку $H \in q_1(G)$ и q_1 - максимальный *m*-функтор, то либо $H = G$, либо $H < \cdot G$ (I). Так как $H \in q_2(G)$ и q_2 - $\mathfrak{X}$ -субабнормальный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор, то либо $H = G$, либо существует максимальная цепь группы G вида $H = H_0 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{X}} \not\subseteq H_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ (II). Из пунктов (I) и (II), как и при доказательстве 1), получаем, что либо $H = G$, либо H - $\mathfrak{X}$ -абнормальная максимальная подгруппа группы G, и значит, q - $\mathfrak{X}$ -абнормальный *m*-функтор.

2) Пусть q_2 - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор. Покажем, что q - регулярный *m*-функтор.

a) Пусть $H \in q(G)$, $N < G$. Покажем, что $HN/N \in q(G/N)$. Так как $H \in q(G)$, то $H \in q_1(G)$ и $H \in q_2(G)$. Поскольку q_2 - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор и $H \in q_2(G)$, то получаем, что $HN/N \in q_2(G/N)$ (*). Так как q_1 - максимальный *m*-функтор и $H \in q_1(G)$, то $H = G$ или $H < \cdot G$. Тогда $HN/N = G/N$ или $HN/N < \cdot G/N$ и поэтому $HN/N \in q_1(G/N)$ (**).

Из (*) – (**) следует, что $HN/N \in q_1(G/N) \cap q_2(G/N) = (q_1 \cap q_2)(G/N) = q(G/N)$.

b) Пусть $M/N \in q(G/N)$. Покажем, что $M \in q(G)$. Так как $M/N \in q(G/N)$, то $M/N \in q_1(G/N)$ и $M/N \in q_2(G/N)$. Поскольку q_1 - максимальный *m*-функтор, то $M < \cdot G$, и значит, $M \in q_1(G)$ (*). Так как q_2 - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор, то $M \in q_2(G)$ (**). Из (*) и (**) получаем, что $M \in q_1(G) \cap q_2(G) = (q_1 \cap q_2)(G) = q(G)$. Из a) - b), следует, что q - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор.

Покажем, что q - *m*-функтор. Пусть $K \in q(G)$. Покажем, что либо $K = G$, либо $K < \cdot G$. Так как $K \in q(G)$, то $K \in q_1(G)$. Поскольку q_1 - максимальный *m*-функтор, то либо $K = G$, либо $K < \cdot G$. Это означает, что q - *m*-функтор.

Таким образом, нами установлено, что q - регулярный *m*-функтор. Лемма доказана.

При изучении подгрупповых $\mathfrak{X}$ -функторов широко используется аппарат теории решеток. Так, множество $Reg(\mathfrak{X})$ всех регулярных подгрупповых $\mathfrak{X}$ -функторов образует дистрибутивную решетку. Рассмотрим следующие подмножества решетки $Reg(\mathfrak{X})$. Через $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ обозначают множество регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$ -функторов. Напомним, что подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется транзитивным, если для любой $\mathfrak{X}$-группы G из того, что $K\in\theta(H)$ и $H\in\theta(G)\cap\mathfrak{X}$, всегда следует, что $K\in\theta(G)$ [4]. Как отмечено в [4], множество $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ является полной решеткой. Действительно, пусть $\{q_i \mid i \in I\}$ - некоторая совокупность элементов из $Reg_{tr}(\mathfrak{F})$, $q = \bigcap_{i\in I} q_i$. Тогда $q \in Reg_{tr}(\mathfrak{X})$. Далее, во множестве $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ имеется подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор $q_1 = S$ такой, что $t \le q_1$, для любого $t \in Reg_{tr}(\mathfrak{X})$. Кроме того, полная решетка $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ является дистрибутивной, поскольку $q_1\cap(q_2\cup q_3)=(q_1\cap q_2)\cup(q_1\cap q_3)$ и $q_1\cup(q_2\cap q_3)=(q_1\cup q_2)\cap(q_1\cup q_3)$, для любых $q_1,q_2,q_3\in Reg_{tr}(\mathfrak{X})$. Отметим, что подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор q_1 является единицей полной решетки $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$, подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор q_0, где $q_0(G)=\{G\}$, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$, является нулем полной решетки $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ - непустые классы групп, $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}$, q - подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор и для каждой группы $G \in \mathfrak{X}_1$ справедливо $q_1(G)=q(G)$. Тогда q_1 - подгрупповой $\mathfrak{X}_1$ -функтор, который называется ограничением функтора q на $\mathfrak{X}_1$, и обозначается $q_1 = q|_{\mathfrak{X}_1}$ [4].

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *- непустой класс групп,* $\mathfrak{X}_1$ *- непустой гомоморф,* $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}$, $q\in Reg_{tr}(\mathfrak{X})$, $q_1 = q|_{\mathfrak{X}_1}$. *Тогда* $q_1\in Reg_{tr}(\mathfrak{X}_1)$.

<u>Доказательство.</u> Покажем, что $q_1 \in Reg_{tr}(\mathfrak{X}_1)$.

1) Установим, что q_1 - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}_1$-функтор. Пусть $G \in \mathfrak{X}_1$. *а)* Пусть $M \in q_1(G)$, $N < G$. Покажем, что $MN/N \in q_1(G/N)$. В самом деле, так как $M \in q_1(G)$ и $G \in \mathfrak{X}_1$, то, в силу $q_1 = q|_{\mathfrak{X}_1}$, получаем $M \in q(G)$, и значит, ввиду регулярности подгруппового $\mathfrak{X}$ -функтора q, имеем $MN/N \in q(G/N)$. Поскольку $\mathfrak{X}_1$ - гомоморф, то $G/N \in \mathfrak{X}_1$ и поэтому $MN/N \in q_1(G/N)$.

б) Пусть $M/N \in q_1(G/N)$. Покажем, что $M \in q_1(G)$. Так как $G/N \in \mathfrak{X}_1$, то $q_1(G/N) = q(G/N)$, и значит, $M/N \in q(G/N)$. Поскольку $G/N \in \mathfrak{X}$ и q - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор, то $M \in q(G)$. Так как $G \in \mathfrak{X}_1$, то, ввиду $q_1 = q|_{\mathfrak{X}_1}$, получаем $M \in q_1(G)$. Из *а)* и *б)* следует, что q_1 - регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}_1$-функтор.

2) Покажем, что q_1 - транзитивный подгрупповой $\mathfrak{X}_1$-функтор. Пусть $G \in \mathfrak{X}_1$, $S\in q_1(H)$, $H \in q_1(G) \cap \mathfrak{X}_1$. Покажем, что $S \in q_1(G)$. Так как $G \in \mathfrak{X}_1$ и $H \in q_1(G)$, то, ввиду равенства $q_1 = q|_{\mathfrak{X}_1}$, имеем $H \in q(G)$. Поскольку $H \in \mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}$, то $H \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $H \in q(G) \cap \mathfrak{X}$ (1). Так как $H \in \mathfrak{X}_1$ и $S \in q_1(H)$, то $S \in q(H)$ (2). Поскольку $G \in \mathfrak{X}$, то из (1) и (2), в силу транзитивности q, следует, что

$S \in q(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{X}_1$, то $S \in q_1(G)$, ввиду $q_1 = q|_{\mathfrak{X}_1}$. Таким образом, q_1 - транзитивный подгрупповой $\mathfrak{X}_1$-функтор.

Из 1) и 2) следует, что $q_1 \in Reg_{tr}(\mathfrak{X}_1)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{X}$ - непустой класс групп, $Reg_m(\mathfrak{X})$ - множество всех регулярных *m*-функторов на $\mathfrak{X}$. Согласно теореме 4.1.10 [4], множество $Reg_m(\mathfrak{X})$ является булевой решеткой. В следующей лемме устанавливается, что множество $Reg_m(\mathfrak{X})$ является алгеброй Ньюмена. Напомним, что алгеброй Ньюмена называется алгебра A с двумя бинарными операциями, удовлетворяющими следующим условиям:

N1) $a(b+c)=ab+ac$; $(a+b)c=ac+bc$, для любых $a, b, c \in A$;

N2) существует элемент 1 такой, что $a1=a$, для любого $a \in A$;

N3) существует элемент 0 такой, что $a+0=0+a=a$, для любого $a \in A$;

N4) для каждого $a \in A$ существует по крайней мере один элемент a' такой, что $aa'=0$ и $a+a'=1$ [5].

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ - непустой класс групп. Тогда множество $Reg_m(\mathfrak{X})$ является алгеброй Ньюмена.*

Доказательство. 1) Поскольку решетка $Reg_m(\mathfrak{X})$ является дистрибутивной, то $q_1 \cup (q_2 \cap q_3) = (q_1 \cup q_2) \cap (q_1 \cup q_3)$ и $(q_1 \cap q_2) \cup q_3 = (q_1 \cup q_3) \cap (q_2 \cup q_3)$, для любых $q_1, q_2, q_3 \in Reg_m(\mathfrak{X})$.

2) Пусть Θ_0 - подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор такой, что $\Theta_0(G) = \{G\}$, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$, $q \in Reg_m(\mathfrak{X})$. Покажем, что $q \cup \Theta_0 = q$. Действительно, так как для всех $G \in \mathfrak{X}$ справедливо $q(G) \cup \Theta_0(G) = \{G\} \cup \{M | M \in q(G), M \neq G\} \cup \{G\} =$
$= \{G\} \cup \{M | M \in q(G), M \neq G\} = q(G)$, то $q \cup \Theta_0 = q$.

3) Пусть Θ_1 - максимальный *m*-функтор, $q \in Reg_m(\mathfrak{X})$. Покажем, что $q \cap \Theta_1 = q$. В самом деле, поскольку $q(G) \cap \Theta_1(G) =$
$$(\{G\} \cup \{M | M \in q(G), M \neq G\}) \cap (\{G\} \cup \{M | M <\cdot G\}) =$$
$\{G\} \cup \{M | M \in q(G), M \neq G\} = q(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$, то $q \cap \Theta_1 = q$.

4) Пусть $q \in Reg_m(\mathfrak{X})$ и $\overline{q}$ - дополнительный *m*-функтор на $\mathfrak{X}$ для q. Согласно лемме 4.1.7 [4], $\overline{q} \in Reg_m(\mathfrak{X})$. Покажем, что $q \cap \overline{q} = \Theta_0$ и $q \cup \overline{q} = \Theta_1$. Действительно, пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда $(q \cap \overline{q})(G) = q(G) \cap \overline{q}(G) = \{G\} = \Theta_0(G)$, то есть $q \cap \overline{q} = \Theta_0$. Далее, $(q \cup \overline{q})(G) = q(G) \cup \overline{q}(G) = \{G\} \cup \{M | M \in q(G), M \neq G\} \cup$
$\cup \{M | M \notin q(G), M <\cdot G\} = \{G\} \cup \{M | M <\cdot G\} = \Theta_1(G)$, то есть $q \cup \overline{q} = \Theta_1$.

Из 1) - 4) следует, что множество $Reg_m(\mathfrak{X})$ является алгеброй Ньюмена. Лемма доказана.

Замечание. Множество $Reg_{tr}(\mathfrak{X})$ не является алгеброй Ньюмена, поскольку не всегда объединение транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов является транзитивным подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором.

Only finite groups are considered. Let $\mathfrak{X}$ be nonempty class of groups. A function θ mapping each group G from $\mathfrak{X}$ onto a certain nonempty system $\theta(G)$ of its subgroups is called a subgroup $\mathfrak{X}$-functor (or else a subgroup functor on $\mathfrak{X}$), if $(\theta(G))^{\varphi}=\theta(G^{\varphi})$ for any isomorphism φ of every group G from $\mathfrak{X}$. In this paper we study some properties of regular subgroup $\mathfrak{X}$-functors, transitive subgroup $\mathfrak{X}$-functors and subgroup m-functors on $\mathfrak{X}$.

The key words: *a finite group, a class of groups, a subgroup functor, a regular subgroup X-functor, a transitive subgroup X-functor, m-functors on X.*

Список литературы

1. Курош А.Г. Радикалы колец и алгебр. Матем. сб., Т. 13. 1953. С. 13 – 26.
2. Amitsur S. A general theory of radicals. Amer. J. Math. V. 74. 1952. P. 774 – 786.
3. Amitsur S. A general theory of radicals. Amer. J. Math. V. 76. 1954. P. 100 – 136.
4. С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука. С. 254. 2003.
5. Биркгоф К.Г. Теория решеток. М.: «Наука», 1984. С. 568

Об авторах

М.М. Сорокина – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, mmsorokina@yandex.ru

С.М. Сазоненко– магистр 2-го курса магистратуры Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

А.П. Симохина - магистр 2-го курса магистратуры Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

УДК 517.53+517.54

ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В L^p-ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н.М. Ткаченко

В статье строится ограниченный интегральный проектор из весового $L^p(b,G)$ пространства измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций и описываются линейные непрерывные функционалы в L^p -пространствах аналитических функций.

Ключевые слова: *весовые пространства, интегральные представления, проекторы, линейные непрерывные функционалы, сопряженные пространства.*

Пусть $S=\{z\in C:|z|<1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости ***C***, G – некоторая односвязная область на ***C***; $d(w,\partial G)$ – расстояние от точки w до границы ∂G, y – функция конформно отображающая область G на единичный круг.

Пусть также $L_b^p(G)$ – класс измеримых по Лебегу в области G функций f таких, что

$$\int_G |f(w)|^p d^b(w,\partial G)dm_2(w)<+\infty, 0<p<+\infty, b>-1, \tag{1}$$

где dm_2 – плоская мера Лебега; $A_b^p(G)$ – множество аналитических в G функций f, для которых справедливо условие (1); $L^p(G)=L_0^p(G)$, $A^p(G)=A_0^p(G)$.

Обозначим аналогично $L^p(b,G)$ – класс измеримых по Лебегу функций, для которых

$$\|f\|_{L^p(b,G)}=\int_G |f(w)|^p(1-|y(w)|^2)^b|y'(w)|^2dm_2(w)<+\infty, 0<p<+\infty, b>-1,$$

и $A^p(b,G)$ – соответствующее подпространство $L^p(b,G)$, состоящее из аналитических в G функций.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости **C**, граница которой содержит более одной точки; $j(z)$ – функция Римана, отображающая S на G, $j(0)=w_0$, $w_0\in G$, $j'(0)>0$, y – обратная функция для j. Тогда интегральный оператор

$$P_h(f)(w)=F(w)=\frac{h+1}{p}\int_G\frac{(1-|y(m)|^2)^h}{(1-\overline{y(m)}y(w))^{h+2}}f(m)|y'(m)|^2dm_2(m)$$

непрерывно отображает пространство $L^p(b,G)$ на $A^p(b,G)$, $1\le p<+\infty$, $b>-1$, $h\ge b$ при $1<p<+\infty$ и $h>b$ при $p=1$, причем существует постоянная $c(b,p)$ такая, что справедлива оценка

$$\|F\|_{A^p(b,G)}\le c(b,p)\|f\|_{L^p(b,G)}. \tag{2}$$

Доказательство. Отметим, что если $f\in A^p(b,G)$, $1\le p<+\infty$, $b>-1$, то $f(j)\in A_b^p(S)$, $1\le p<+\infty$, $b>-1$. Действительно, если $w=j(z)$, то

$$\int_S|f(j(z))|^p(1-|z|^2)^b\,dm_2(z)=\int_G|f(w)|^p(1-|y(w)|^2)^b|y'(w)|^2dm_2(w)<+\infty.$$

А значит, для функции $f(j)\in A_b^p(S)$, $1\le p<+\infty$, $b>-1$, справедливо представление (см.[1], [4]):

$$f(j(z))=\frac{h+1}{p}\int_S\frac{(1-|z|^2)^h}{(1-\bar{z}z)^{h+2}}f(j(z))dm_2(z),h\ge b,$$

или

$$f(w)=\frac{h+1}{p}\int_G\frac{(1-|y(m)|^2)^h}{(1-\overline{y(m)}y(w))^{h+2}}f(m)|y'(m)|^2dm_2(m),h\ge b. \tag{3}$$

Обозначая

$$F(w)=\frac{h+1}{p}\int_G\frac{(1-|y(m)|^2)^h}{(1-\overline{y(m)}y(w))^{h+2}}f(m)|y'(m)|^2dm_2(m),h\ge b,$$

получим, если $f\in A^p(b,G)$, $1\le p<+\infty$, $b>-1$, то $F(w)=f(w)$, $w\in G$. Покажем, что если $f\in L^p(b,G)$, то $F\in A^p(b,G)$ и справедлива оценка (2) или эквивалентная ей

$$\int_S|F(j(z))|^p(1-|z|)^b\,dm_2(z)\le c\int_S|f(j(z))|^p(1-|z|)^b\,dm_2(z).$$

В дальнейшем применяется методика работы [4] при $w(t)=t^b$, $n=1$.

Пусть сначала $1<p<+\infty$ и, как обычно, $c_g(z)=(1-|z|)^{-g/pq}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $0<g<\min\{(b+1)q;(h+1)p\}$.

Из представления функции $F(w)$ с помощью неравенства Гельдера получаем:

$$\int_S|F(j(z))|^p(1-|z|)^b\,dm_2(z)\le$$

$$\le c_1\int_S|f(j(z))|^p(1-|z|^2)^h(1-|z|)^{g/q}\int_S\frac{(1-|z|)^b}{(1-|z|)^{g/q}|1-\bar{z}z|^{h+2}}dm_2(z)dm_2(z).$$

Но, как нетрудно показать (см., например, [3], [4]):

$$\int\limits_S \frac{(1-|z|)^b}{(1-|z|)^{g/q}\left|1-\bar{z}z\right|^{h+2}}dm_2(z) \le \frac{c_2(1-|z\,|)^b}{(1-|z\,|)^{g/q}(1-|z\,|)^h}$$

при $0 < g/q < b+1,\ h > b - g/q$.

Подставляя последнюю оценку в предшествующее неравенство, получаем справедливость (2) для $1 < p < +\infty$.

Соответствующая оценка для $p=1$ доказывается аналогично. Имеем:

$$\int\limits_S |F(j\,(z))|(1-|z|)^b\,dm_2(z) \le c_3\int\limits_S |\,f(j\,(z\,))|(1-|z\,|^2)^h\int\limits_S \frac{(1-|z|)^b}{\left|1-\bar{z}z\right|^{h+2}}dm_2(z)dm_2(z\,). \quad (4)$$

Но $\displaystyle\int\limits_S \frac{(1-|z|)^b}{\left|1-\bar{z}z\right|^{h+2}}dm_2(z) \le \frac{c_4(1-|z\,|)^b}{(1-|z\,|)^h}$ при $h > b$.

Подставляя данную оценку в неравенство (4), получаем справедливость оценки (2) при $p=1$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости **C**, граница которой содержит более одной точки; $j\,(z)$ – функция Римана, отображающая S на G, $j\,(0) = w_0$, $w_0 \in G$, $j\,'(0) > 0$, y – обратная функция для j. Пусть также $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

$e_w(m) = \dfrac{1}{(1-y\,(m)\overline{y\,(w)})^{b+2}},\ w, m \in S,\ b \ge 2.$

1) Если $\Phi \in (A^p)^*$, $g(w) = \overline{\Phi(e_w)}$, то

а) $g \in A^q(b,G)$, при этом $\forall f \in A^p(G)$ $\Phi(f)$ представим в виде

$$\Phi(f) = \int\limits_G f(w)\overline{g(w)}(1-|y\,(w)|^2)^b\,|y\,'(w)|^2\,dm_2(w), \quad (5)$$

б) существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что справедливы оценки

$$c_1\|g\|_{A^q(b,G)} \le \|\Phi\| \le c_2\|g\|_{A^q(b,G)}. \quad (6)$$

2) Обратно, если $g(w)$ – произвольная функция из $A^q(b,G)$, то по формуле (5) порождается линейный непрерывный функционал $\Phi(f)$ на $A^p(G)$, для которого справедливы оценки (6).

Доказательство. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на $A^p(G)$. Покажем, что существует функция $g \in A^q(b,G)$, для которой справедливы оценки (6).

По теореме Хана-Банаха существует Φ_1 – линейный непрерывный функционал на $L^p(G)$ такой, что $\|\Phi\| = \|\Phi_1\|$, при этом $\Phi_1(f) = \Phi(f)$, если $f \in A^p(G)$.

Заметим, что для любой однолистной в единичном круге S функции справедливы оценки (см., например, [3], с. 53):

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |j\,'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

а значит, в условиях теоремы получаем:

$$\frac{1-|y\,(w)|}{(1+|y\,(w)|)^3} \le \frac{1}{|y\,'(w)|} \le \frac{1+|y\,(w)|}{(1-|y\,(w)|)^3}$$

или

$$\frac{1-|y(w)|}{8} \le \frac{1}{|y'(w)|} \le \frac{2}{(1-|y(w)|)^3},$$

то есть $(1-|y(w)|)^2|y'(w)|^2 \le 64, \forall w \in G,$ а значит, $(1-|y(w)|)^b|y'(w)|^2 \le c, \quad b \ge 2,$ поскольку $1-|y(w)| \le 1, \forall w \in G.$

Тогда, если $f \in L^p(G)$, то

$$\|f\|_{L^p(b,G)} = \int_G |f(w)|^p (1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w) \le \le c\int_G |f(w)|^p dm_2(w) = \|f\|_{L^p(G)} < +\infty,$$

то есть $L^p(G) \subseteq L^p(b,G)$, при этом $L^p(G)$ – линейное подпространство пространства $L^p(b,G)$.

Поэтому по теореме Хана-Банаха существует Φ_2 – линейный непрерывный функционал на $L^p(b,G)$ такой, что $\|\Phi_1\| = \|\Phi_2\|$, причем $\Phi_2(f) = \Phi_1(f)$, если $f \in L^p(G)$, и тем самым $\Phi_2(f) = \Phi_1(f)$, если $f \in A^p(G)$.

Таким образом, существует Φ_2 – линейный непрерывный функционал на $L^p(b,G)$ такой, что $\|\Phi\| = \|\Phi_2\|$ и $\Phi_2(f) = \Phi(f)$, если $f \in A^p(G)$.

Далее, по теореме Ф. Рисса существует функция $h \in L^q(b,G)$ такая, что $\|h\|_{L^q(b,G)} = \|\Phi_2\|$ и

$$\Phi_2(f) = \int_G f(w)\overline{h(w)}(1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w).$$

Пусть теперь $e_m(w) = \frac{b+1}{p}\frac{1}{(1-\overline{y(m)}y(w))^{b+2}}, b \ge 2.$ Очевидно, что $e_m \in A^p(G)$, поскольку

$$|e_m(w)| \le \frac{b+1}{p}\frac{1}{(1-|\overline{y(m)}||y(w)|)^{b+2}} \le \frac{b+1}{p}\frac{1}{(1-|y(w)|)^{b+2}}, b \ge 2.$$

Обозначим

$$g(w) = \overline{\Phi(e_w)} = \frac{b+1}{p}\int_G \frac{(1-|y(m)|^2)^b}{(1-\overline{y(m)}y(w))^{b+2}} h(m)|y'(m)|^2 dm_2(m)$$

где $h \in L^q(b,G), b \ge 2.$

По теореме 1 $g \in A^q(b,G)$, причем $c_1\|g\|_{A^q(b,G)} \le \|h\|_{L^q(b,G)}, \ b > -1.$

Но если $f \in A^p(G)$, то

$$\int_G f(w)\overline{g(w)}(1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w) =$$

$$= \int_G \overline{h(m)}(1-|y(m)|^2)^b |y'(m)|^2 \frac{b+1}{p}\int_G \frac{(1-|y(w)|^2)^b}{(1-\overline{y(w)}y(m))^{b+2}} f(w)|y'(w)|^2 dm_2(w)dm_2(m) =$$

$$= \int_G f(m)\overline{h(m)}(1-|y(m)|^2)^b |y'(m)|^2 dm_2(m) = \Phi_2(f) = \Phi(f).$$

Мы воспользовались интегральным представлением типа (3) функции из класса $A^p(G)$, справедливым при $b \ge 2$.

Значит, исходя из вышеизложенных соображений, а именно, $\|\Phi\| = \|\Phi_2\|$, $\|h\|_{L^q(b,G)} = \|\Phi_2\|$, и результата теоремы 1: $c_1\|g\|_{A^q(b,G)} \le \|h\|_{L^q(b,G)}$, имеем $c_1\|g\|_{A^q(b,G)} \le \|h\| = \|\Phi\|$.

Для доказательства обратного неравенства покажем сначала справедливость пункта 2) теоремы.

Пусть $g(w)$ – произвольная функция из $A^q(b,G)$ и

$$\Phi(f) = \int_G f(w)\overline{g(w)}(1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w).$$

Покажем, Φ – линейный непрерывный функционал на $A^p(G)$, для которого справедливы оценки (6).

Применим неравенство Гельдера, имеем:

$$|\Phi(f)| \le \left(\int_G |f(w)|^p (1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w)\right)^{1/p} \times$$
$$\times\left(\int_G |g(w)|^q (1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w)\right)^{1/q},$$

откуда так как $(1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 \le c_1$, $b \ge 2$, то

$$|\Phi(f)| \le c_2\left(\int_G |f(w)|^p dm_2(w)\right)^{1/p} \times \left(\int_G |g(w)|^q (1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w)\right)^{1/q},$$

а значит, $|\Phi(f)| \le c_2\|f\|_{A^p(G)}\|g\|_{A^q(b,G)}$ или $\sup\limits_{\|f\|_{A^p(G)}\le 1} |\Phi(f)| \le c_2\|g\|_{A^q(b,G)}$, следовательно, $\|\Phi\| \le c_2\|g\|_{A^q(b,G)}$, то есть Φ – линейный непрерывный функционал на $A^p(G)$.

Кроме того, используя снова интегральное представление (3) функции из класса $A^p(b,G)$, имеем:

$$\Phi(e_w) = \frac{b+1}{p}\int_G \frac{(1-|y(m)|^2)^b}{(1-\overline{y(m)}y(w))^{b+2}} h(m)|y'(m)|^2 dm_2(m) = \overline{g(w)},$$

где $e_w(m) = \dfrac{1}{(1-y(m)\overline{y(w)})^{b+2}}$, $b \ge 2$.

Учитывая теперь первую часть доказательства теоремы, получаем: $c_1\|g\|_{A^q(b,G)} \le \|\Phi\|$.

Докажем единственность представления (5).

Действительно, пусть $g_1, g_2 \in A^p(b,G)$ и

$$\Phi(f) = \int_G f(w)\overline{g_1(w)}(1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w),$$
$$\Phi(f) = \int_G f(w)\overline{g_2(w)}(1-|y(w)|^2)^b |y'(w)|^2 dm_2(w).$$

Но тогда по условию теоремы $g_1(w) = \overline{\Phi(e_w)}$ и $g_2(w) = \overline{\Phi(e_w)}$, откуда $g_1(w) = g_2(w)$. Теорема доказана.

Оказывается, по формуле (5) порождается линейный непрерывный функционал и на более широком пространстве $A^p(b,G)$:

Теорема 3. Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости **C**, граница которой содержит более одной точки; $j(z)$ – функция Римана, отображающая S на G, $j(0) = w_0$, $w_0 \in G$, $j'(0) > 0$, y – обратная функция для j. Пусть также $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $e_w(m) = \frac{1}{(1 - y(m)\overline{y(w)})^{b+2}}$, $b > -1$. Тогда

1) Если $\Phi \in (A^p(b,G))^*$, $g(w) = \overline{\Phi(e_w)}$, то

а) $g \in A^q(b,G)$, при этом $\forall f \in A^p(b,G)$ $\Phi(f)$ представим в виде (5);

б) существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что справедливы оценки (6).

2) Обратно, если $g(w)$ – произвольная функция из $A^q(b,G)$, то по формуле (5) порождается линейный непрерывный функционал $\Phi(f)$ на $A^p(b,G)$, для которого справедливы оценки (6).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

In paper we construct an bounded integral projection which maps the weighted $L^p(b,G)$ spaces of measurable functions onto the corresponding spaces of analytic functions and we describe linear continuous functionales in L^p spaces of analytic functions.

The key words: *weighted spaces, integral representations, projections, linear continuous functionales, conjugates spaces.*

Список литературы

1. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций / М.М. Джрбашян // Сообщения института математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-35.

2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М.: «Наука». 1966. С. 628

3. Ткаченко Н.М. Оценки производной аналитической функции в областях с кусочно-гладкой границей / Н.М. Ткаченко // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвузовский сборник научных трудов / Смоленский гос. университет. – Смоленск: Изд-во СмолГУ. 2007. Вып. 8. С. 85-93.

4. Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций / Ф.А. Шамоян // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31, № 2. С. 197-215.

Об авторе

Н.М. Ткаченко – стар. перпод. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, tkachenkonm@yandex.ru

УДК 517.5

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ КЛАССА N_a^∞ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1]

Ф.А. Шамоян, В.А. Беднаж

В работе доказано, что класс N_a^∞ инвариантен относительно оператора дифференцирования при всех $a>0$.

Ключевые слова: голоморфные функции, единичный круг, мероморфные функции, характеристика Р. Неванлинны, класс N_a^∞, оператор дифференцирования.

Пусть $D=\{z:|z|<1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ - множество всех голоморфных в D функций, $\mathrm{M}(D)$ - множество всех мероморфных в D функций, $f\in \mathrm{M}(D)$. Характеристикой Р. Неванлинны функции f называется выражение

$$T(r,f)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\ln^{+}\left|f\left(re^{ij}\right)\right|dj+N(r,f),$$

где $r\in(0,1)$, $N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt$ - усредненная считающая функция последовательности полюсов функции f, $n(r,\infty)=\{card\ b_k,\ |b_k|\le r\}$, b_k - полюса функции f в D, $n(0,\infty)$ - кратность полюса f в начале координат.

Не ограничивая общности, в дальнейшем всюду будем предполагать, что точка $z=0$ не является особой точкой функции f.

Для $a>0$ определим N_a^∞ класс функций:

$$N_a^\infty=\left\{f\in \mathrm{M}(D):T(r,f)\le\frac{c_f}{(1-r)^a};\ 0\le r\le 1\right\}.$$

Хорошо известно, что класс Р. Неванлинны $N=N_0^\infty$ не инвариантен относительно оператора дифференцирования. Гипотеза об инвариантности класса Р. Неванлинны относительно оператора дифференцирования была выдвинута Р. Неванлинной в работе (см.[5]). В дальнейшем О. Фростман в [3] и Л. Хан в [4] установили, что существуют функции $f\in N$ такие, что $f'\notin N$.

Основным результатом статьи являются доказательство следующего утверждения:

Теорема. *Класс N_a^∞ при любых $a>0$ инвариантен относительно оператора дифференцирования.*

Введем определение класса О. Бесова $B_{p,q}^a$:

Пусть $0<a<+\infty$, $n=[a]$, $s=a-n$, тогда функция

$$y\in B_{p,q}^a \Leftrightarrow \int_{-p}^{p}\left(\int_{-p}^{p}\left|f^{(n)}\left(e^{i(x+t)}\right)-2f^{(n)}\left(e^{ix}\right)+f^{(n)}\left(e^{i(x-t)}\right)\right|^p\right)^{\frac{q}{p}}dx\frac{dt}{t^{sq+1}}<+\infty.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ:№09-01-97517

Для доказательства теоремы используем параметрическое представление класса N_a^∞, полученное в работе [6].

Теорема А. *Пусть* $a>0, b>a-1$*, тогда класс* N_a^∞ *совпадает с классом мероморфных в* D *функций, допускающих представление*

$$f(z)=\frac{c_l z^l\cdot\Pi_b(z,a_k)\cdot\exp\int\limits_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+2}}dq}{\Pi_b(z,b_k)}, \quad (1)$$

где l *- неотрицательное целое число,*

$y\left(e^{iq}\right)$ *- функция из класса О. Бесова* $B_{1,\infty}^{b-a+1}$*, то есть*

$$\int\limits_{-p}^{p}\frac{dt}{t^{b-a+1}}\left(\int\limits_{-p}^{p}\left|f\left(e^{i(q+t)}\right)-2f\left(e^{iq}\right)+f\left(e^{i(q-t)}\right)\right|\right)dx<+\infty \text{ при } 0<b-a+1\le 2,$$

$$\Pi_b(z,a_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left\{-\frac{2(b+1)}{p}\int\limits_0^1\int\limits_{-p}^{p}\frac{\left(1-r^2\right)^b}{\left(1-re^{-iq}a_k\right)^{b+2}}\cdot\ln\left|1-\frac{re^{iq}}{a_k}\right|r\,dr\,dq\right\},$$

$\{a_k\}_1^\infty$, $\{b_k\}_1^\infty$ *- произвольные последовательности точек из* D*, удовлетворяющих условиям*

$$n(r)=\left\{card\ \ a_k,\ |a_k|\le r\right\}\le\frac{c_1}{(1-r)^{a+1}},$$

$$\tilde{n}(r)=\left\{card\ \ b_k,\ |b_k|\le r\right\}\le\frac{c_2}{(1-r)^{a+1}}.$$

Обозначим A_a^∞ - пространство аналитических функций из класса N_a^∞, т.е. $\mathrm{A}_a^\infty=N_a^\infty\cap\mathrm{H}(D)$.

Тогда очевидно, чтобы доказать теорему достаточно установить инвариантность относительно оператора дифференцирования класса A_a^∞, $a>0$.

Лемма. *Пусть*

$$h(z)=(1-U(z))\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{U^j(z)}{j}\right), z\in D,$$

где $U(z)$ *- голоморфная в* D *функция. Тогда справедливо равенство*

$$h(z)=-U'(z)\cdot U^p(z)\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{U^j(z)}{j}\right),\ z\in D.$$

Доказательство. Имеем

$$h'(z)=-U'(z)\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{U^j(z)}{j}\right)+$$

$$+(1-U(z))\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{U^j(z)}{j}\right)\cdot\sum_{j=1}^{p}U^{j-1}(z)\cdot U'(z)=$$

$$=U'(z)\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{U^j(z)}{j}\right)\cdot\left[-1+(1-U(z))\sum_{j=1}^{p}U^{j-1}(z)\right]=$$

$$=U'(z)\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{U^j(z)}{j}\right)\cdot\left[-1+1-U(z)+\sum_{j=2}^{p}U^{j-1}(z)-\sum_{j=2}^{p}U^j(z)\right]=$$

$$=U'(z)\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{U^j(z)}{j}\right)\cdot\left(-U^p(z)\right).$$

Лемма доказана.

Замечание. *Когда* $U(z)=z$, $z\in D$, *аналогичная лемма доказана в работе (см.[2]).*

Пусть теперь f - произвольная функция из пространства A_a^∞, $a>0$.

Теорема Б (см.[6]). *Пусть* $a>0, b>a-1$, *тогда класс* A_a^∞ *совпадает с классом голоморфных в* D *функций, допускающих представление*

$$f(z)=\Pi_b(z,z_k)\cdot\exp\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+2}}dq\ , \tag{2}$$

где $\{z_k\}_1^\infty$ *- произвольная последовательность точек из* D, *удовлетворяющих условию*

$$n(r)\le\frac{c}{(1-r)^{a+1}}, \tag{3}$$

$y\left(e^{iq}\right)$ *- функция из класса О. Бесова* $B_{1,\infty}^{b-a+1}$.

Для краткости обозначим

$$g(z)=\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{b+2}}dq\ .$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что $b=p$ достаточно большое натуральное число.

Доказательство теоремы. Из равенства (2) следует, что

$$f'(z)=\Pi_p(z,z_k)\cdot\exp g(z)\cdot g'(z)+\Pi_p'(z,z_k)\cdot\exp g(z)=F_1(z)+F_2(z),$$

где

$$F_1(z)=\Pi_p(z,z_k)\cdot\exp g(z)\cdot g'(z),$$
$$F_2(z)=\Pi_p'(z,z_k)\cdot\exp g(z).$$

Используя теорему А достаточно доказать, что функции $g'\in A_a^\infty$ и $\dfrac{\Pi_p'(z,z_k)}{\Pi_p(z,z_k)}\in N_a^\infty$.

Сначала докажем, что $F_1\in A_a^\infty$.

Поскольку

$$\ln^+\left|F_1(z)\right|\le\ln^+\left|f(z)\right|+\ln^+\left|g'(z)\right|,$$

то достаточно оценить $T(g',r)$. Имеем

$$T(g',r)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\ln^+\left|g'\left(re^{ij}\right)\right|dj\ .$$

Но очевидно, что

$$\left|g'(z)\right|\le c\cdot\left|\int_{-p}^{p}\frac{y\left(e^{iq}\right)\cdot e^{-iq}}{\left(1-e^{-iq}z\right)^{p+3}}dq\right|\le\frac{c}{\left(1-|z|\right)^{p+3}}\cdot\int_{-p}^{p}\left|y\left(e^{iq}\right)\right|dq\le\frac{c_1}{\left(1-|z|\right)^{p+3}}.$$

Поэтому,

$$T(g',r)\le\tilde{c}\ln\frac{c_1}{(1-r)},\quad r\in(0,1).$$

Следовательно,

$$T(g',r)\le\frac{\tilde{c}_1}{(1-r)^a},\quad r\in(0,1).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\ln^{+}\left|F_1\left(re^{ij}\right)\right|dj \le \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\ln^{+}\left|f\left(re^{ij}\right)\right|dj + \frac{c_1}{(1-r)^a} \le \frac{c_2}{(1-r)^a}. \qquad (4)$$

Теперь докажем принадлежность классу N_a^∞ функции $G(z)=\dfrac{\Pi'_p(z,z_k)}{\Pi_p(z,z_k)}$, и тем самым докажем, что $F_2(z)\in \mathrm{A}_a^\infty$, поскольку $F_2(z)=G(z)\cdot\Pi_p(z,z_k)\cdot\exp g(z)$.

Вспомним теперь, что при $b=p$ произведение Π_p имеет вид

$$\Pi_p(z,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\overline{z}_k\left(\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^j\right\}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^j\right\},\ z\in D. \qquad (5)$$

Обозначим

$$A_p(z,z_k)=\left(1-\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^j\right\}, \qquad (6)$$

тогда

$$\Pi_p(z,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}A_p(z,z_k).$$

Очевидно, что

$$\Pi'_p(z,z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\Pi_{p,k}(z)\cdot A'_p(z,z_k),$$

где

$$\Pi_{p,k}(z)=\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{\infty}A_p\left(z,z_j\right).$$

Используя лемму, получим

$$A'_p(z,z_k)=-\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)'\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^p\cdot\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^j\right\}=$$

$$=-\frac{\overline{z}_k\left(1-|z_k|^2\right)}{\left(1-\overline{z}_k\cdot z\right)^2}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^p\cdot\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^j\right\}.$$

Поэтому,

$$\Pi'_p(z,z_k)=-\sum_{k=1}^{\infty}\Pi_{p,k}(z)\cdot\frac{\overline{z}_k\left(1-|z_k|^2\right)}{\left(1-\overline{z}_k\cdot z\right)^2}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^p\cdot\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\cdot\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k\cdot z}\right)^j\right\}$$

или, используя представление (6),

$$\Pi'_p(z,z_k)=-\sum_{k=1}^{\infty}\Pi_{p,k}(z)\cdot A_p(z,z_k)\cdot\frac{\left(1-|z_k|^2\right)^{p+1}}{\left(1-\overline{z}_k\cdot z\right)^{p+2}}\cdot\left(\frac{1-\overline{z}_k\cdot z}{z_k-z}\right).$$

Далее, учитывая формулу (5), получим

$$\Pi'_p\left(z,z_k\right)=-\Pi_p\left(z,z_k\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left|z_k\right|^2\right)^{p+1}}{\left(1-\overline{z}_k\cdot z\right)^{p+1}}\cdot\left(\frac{1}{z_k-z}\right),\ z\in D.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{\Pi'_p\left(z,z_k\right)}{\Pi_p\left(z,z_k\right)}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left|z_k\right|^2\right)^{p+1}}{\left(1-\overline{z}_k\cdot z\right)^{p+1}}\cdot\left(\frac{1}{z_k-z}\right),\ z\in D,\quad z\neq z_k,\ k=1,2,\mathbf{K}$$

Пусть $0<d\le 1$, а p - такое натуральное число, что

$$\left(p+1\right)d>a-1,$$

Тогда как установлено в работе (см. [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left|z_k\right|\right)^{\left(p+1\right)d}<+\infty.$$

Учитывая это и используя то, что при $0<d<1$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k\right)^d\le\sum_{k=1}^{\infty}c^d{}_k,\quad c_k\ge 0,\ k=1,2,\mathbf{K},$$

получаем

$$\left|\frac{\Pi'_p\left(z,z_k\right)}{\Pi_p\left(z,z_k\right)}\right|^d\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left|z_k\right|^2\right)^{d\left(p+1\right)}}{\left|1-\overline{z}_k\cdot z\right|^{d\left(p+1\right)}}\cdot\frac{1}{\left|z_k-z\right|^d}.$$

Поэтому,

$$\int_{-p}^{p}\left|\frac{\Pi'_p\left(re^{ij},z_k\right)}{\Pi_p\left(re^{ij},z_k\right)}\right|^d dj\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left|z_k\right|^2\right)^{d\left(p+1\right)}}{\left(1-\left|\overline{z}_k\right|\left|z\right|\right)^{d\left(p+1\right)}}\cdot\int_{-p}^{p}\frac{dj}{\left|z_k-re^{ij}\right|^d}. \qquad (7)$$

Докажем, что последний интеграл ограничен. Имеем

$$\int_{-p}^{p}\frac{dj}{\left|r_ke^{ij_k}-re^{ij}\right|^d}=\int_{-p}^{p}\frac{dj}{\left(\left(r-r_k\right)^2+4rr_k\sin^2\left(\frac{j-j_k}{2}\right)\right)^{\frac{d}{2}}}=$$

$$=\int_{-p}^{p}\frac{dj}{\left(\left(r-r_k\right)^2+4rr_k\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{d}{2}}}\le c\int_{0}^{p}\frac{dt}{t^{2d}}\le c_1,$$

при условии $r_k>r_0>0$.

Следовательно, из (7) получаем

$$\int_{-p}^{p}\left|\frac{\Pi'_p\left(re^{ij},z_k\right)}{\Pi_p\left(re^{ij},z_k\right)}\right|^d dj\le c_2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left|z_k\right|^2\right)^{d\left(p+1\right)}}{\left(1-r\right)^{d\left(p+1\right)}}=$$

$$\le\frac{c_2}{\left(1-r\right)^{d\left(p+1\right)}}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left|z_k\right|^2\right)^{d\left(p+1\right)}\le\frac{c_3}{\left(1-r\right)^{d\left(p+1\right)}}.$$

Далее, учитывая полученные оценки, имеем

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\ln^+\left|\frac{\Pi'_p\left(re^{ij},z_k\right)}{\Pi_p\left(re^{ij},z_k\right)}\right|dj\le\frac{1}{d}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left|\frac{\Pi'_p\left(re^{ij},z_k\right)}{\Pi_p\left(re^{ij},z_k\right)}\right|^d dj\le$$

$$\leq c(p+1)\cdot \ln\frac{1}{(1-r)} \leq \frac{\tilde{c}(p)}{(1-r)^{a}},$$

Следовательно, функция

$$G(z)=\frac{\Pi_p'(z,z_k)}{\Pi_p(z,z_k)}\in N_a^{\infty},$$

а функция

$$F_2(z)=G(z)\cdot\Pi_p(z,z_k)\cdot\exp g(z)\in A_a^{\infty}.$$

Теорема доказана.

In the paper proof that the class N_a^{∞} invariance with operator of differentiation for all $a>0$.

The key words: *holomorphic of function, individual disk, meromorphic of function, class* N_a^{∞} *, characteristic of Nevanlinna , operator of differentiation.*

Список литературы

1. Шамоян Ф.А. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи его границы// Изв. АН Арм.ССР. Серия Математика. 1983. Т.18. № 1.
2. Branges L. Hilbert spaces of entire functions. – Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968. P.326.
3. Frostman O. On analytic functions with bounded characteristic // Bull. Amer. Math. Soc. – 1946 V. 52. № 8. P. 694-699.
4. Hahn L. On the Bloch – Nevanlinna problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1972.V. 32. № 1. P. 221-224.
5. Nevanlinna R. Le thoreme de Picard – Borel et la functions meromorphes. – Paris: Gauthier – Villars, 1929 vii – P. 1799.
6. Shamoyan F.A., Shubabko E.N. Parametrical Representations of Some Classes of Holomorphic Function in the Disk // Operator Theory: Advances and Applications. 2000. V. 113. P. 331-338.

Об авторах

Ф. А. Шамоян - док. проф. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, shamoyanfa@yandex.ru.

В. А. Беднаж - канд. доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, e-mail: verabednazh@rambler.ru.

УДК 517.5

ОПИСАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $H^{\vec p}(\vec w)$ В ПРОСТРАНСТВО $l_A^{\vec p}$[1]

О.В. Ярославцева

В работе описываются мультипликаторы вида $l_{k_1,\dots,k_n}=\prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$ из пространства $H^{\vec p}(\vec w)$ в пространство $l_A^{\vec p}$.

Ключевые слова: *голоморфные функции, единичный полидиск, правильно меняющиеся функции на* $(0,1]$, *пространство* $H^{\vec p}(\vec w)$, *пространство* $l_A^{\vec p}$, *мультипликаторы.*

Пусть $U^n = \{z=(z_1,...,z_n): |z_j|<1,\ j=\overline{1,n}\}$ - единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве C^n, $\vec p=(p_1,...,p_n)$, $\vec w(t)=(w_1(t),...,w_n(t))$, где $0<p_j<+\infty$, $w_j(t)$ - положительные правильно меняющиеся функции на $(0,1]$, $j=\overline{1,n}$. Обозначим через $L^{\vec p}(\vec w)$ пространство измеримых в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{\vec p}(\vec w)}=\left(\int_U w_n(1-|z_n|)\left(\int_U w_{n-1}(1-|z_{n-1}|)...\left(\int_U |f(z_1,...,z_n)|^{p_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times w_1(1-|z_1|)dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}...dm_2(z_{n-1})\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}<+\infty,$$

где dm_2 - 2-мерная мера Лебега на U. Подпространство $L^{\vec p}(\vec w)$, состоящее из голоморфных в U^n функций, обозначим через $H^{\vec p}(\vec w)$.

Напомним, что классом функций, правильно изменяющихся на промежутке $(0,1]$, называется множество измеримых функций w, удовлетворяющих следующим свойствам:

а) $w(t)>0,\ \ t\in(0,1];$

б) существуют положительные числа $q_w, m_w \in (0,1),\ M_w>0$ такие, что

$$m_w \le \frac{w(lr)}{w(r)} \le M_w,\ \ r\in(0,1],\ \ l\in[q_w,1].$$

Множество таких функций обозначим через S. Можно установить, что $w\in S$ тогда и только тогда, когда существуют ограниченные измеримые функции h, e на $(0,1]$ такие, что

$$w(x)=\exp\left\{h(x)+\int_x^1 \frac{e(u)}{u}du\right\},\ \ x\in(0,1],$$

при этом

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ:№09-01-97517

$$\frac{\ln m_w}{\ln\frac{1}{q_w}} \le e(u) \le \frac{\ln M_w}{\ln\frac{1}{q_w}},\ \ u\in(0,1].$$

Будем предполагать, что $h(x)\equiv 0,\ \ a_w=\dfrac{\ln m_w}{\ln\frac{1}{q_w}},\ \ b_w=\dfrac{\ln M_w}{\ln\frac{1}{q_w}},\ \ a_w>-1,\ \ 0<b_w<1.$

Через $l_A^{\vec p}$ обозначим пространство голоморфных в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{l_A^{\vec p}}=\left(\sum_{k_n=0}^{+\infty}...\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}|b_{k_1,...,k_n}|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}...\right)^{1/p_n}<+\infty,$$

где $g(z_1,...,z_n)=\sum\limits_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} b_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1}...z_n^{k_n}$.

Определение. Последовательность $\{l_{k_1,...,k_n}\}$ называется мультипликатором из пространства $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ в пространство $l_A^{\vec{p}}$, если для любой функции $g \in H^{\vec{p}}(\vec{w})$ такой, что

$$g(z_1,...,z_n) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} b_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1}...z_n^{k_n},$$

сходится ряд

$$\left(\sum_{k_n=0}^{+\infty} ... \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \left| l_{k_1,...,k_n} b_{k_1,...,k_n} \right|^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \right)^{p_3/p_2} ... \right)^{1/p_n} < +\infty .$$

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма А. *(см. [1]). Пусть $w_j \in S$, $j = \overline{1,n}$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\int_{U^n} \frac{w(1-|z|)}{\left|1-\bar{z}z\right|^{a+2}} dm_{2n}(z) \le C(a) \frac{w(1-|z|)}{(1-|z|)^a},$$

$z \in U^n$, $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$, $a_j > a_{w_j}$, $j = \overline{1,n}$,

Лемма 1. *Пусть $f \in H^{\vec{p}}(\vec{w})$, $\vec{p} = (p_1,...,p_n)$, $\vec{w} = (w_1,...,w_n)$, $0 < p_j \le 1$, $w_j \in S$, $j = \overline{1,n}$. Тогда если $f(z_1,...,z_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1}...z_n^{k_n}$, то*

$$\left|a_{k_1,...,k_n}\right| \le c \frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[w\left(\frac{1}{k^*}\right)\right]^{1/p}} \|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{w})},$$

где

$$\frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[w\left(\frac{1}{k^*}\right)\right]^{1/p}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(k_j^*)^{2/p_j-1}}{\left[w_j\left(\frac{1}{k_j^*}\right)\right]^{1/p_j}}, \quad k_j^* = \begin{cases} k_j, k_j \ne 0; \\ 1, \quad k_j = 0; \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Лемма 2. *Пусть $\vec{p} = (p_1,...,p_n)$, $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$, $0 < p_j \le 1$, $a_j < p_j$, $a_j > -1$, $j = \overline{1,n}$, $l_{k_1,...,k_n} = \prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$. Тогда из условий*

$$1) \sum_{k_j=1}^{+\infty} \left| l_{k_j} \right|^{p_j} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

$$2) \sum_{k_n=0}^{m_n} ... \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \left(\sum_{k_1=0}^{m_1} \left| l_{k_1,...,k_n} \right|^{p_1} (k_1^*)^2 \right)^{p_2/p_1} (k_2^*)^2 \right)^{p_3/p_2} ...(k_n^*)^2 \le$$

$$\le C_1 \left((m_1^*)^{(p_1-a_1)p_n/p_1} (m_2^*)^{(p_2-a_2)p_n/p_2} ...(m_n^*)^{(p_n-a_n)} \right)$$

следует, что

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty} \left| l_{k_j} \right|^{p_j} \le C_2 (m_j^*)^{p_j-a_j-2}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Здесь $k_j^* = \begin{cases} k_j, k_j \neq 0; \\ 1, \quad k_j = 0; \end{cases}$ $m_j^* = \begin{cases} m_j, m_j \neq 0; \\ 1, \quad m_j = 0; \end{cases}$ $j = \overline{1,n}$.

Лемма 3. *Пусть* $\vec{p} = (p_1,...,p_n)$, $\vec{w} = (w_1,...,w_n)$, $0 < p_j \le 1$, $w_j \in S$, $0 < b_{w_j} < 1$, $j = \overline{1,n}$, $l_{k_1,...,k_n} = \prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$. *Тогда при условии (1) из того,что*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n} \dots \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \left(\sum_{k_1=0}^{m_1} \left| l_{k_1,...,k_n} \right|^{p_1} (k_1^*)^2 \right)^{p_2/p_1} (k_2^*)^2 \right)^{p_3/p_2} \dots (k_n^*)^2 \le$$

$$\le C_1 \left((m_1^*)^{p_n} (m_2^*)^{p_n} \dots (m_n^*)^{p_n} \left[w_1 \left(\frac{1}{m_1^*} \right) \right]^{p_n/p_1} \left[w_2 \left(\frac{1}{m_2^*} \right) \right]^{p_n/p_2} \dots w_n \left(\frac{1}{m_n^*} \right) \right)$$

следует, что

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty} \left| l_{k_j} \right|^{p_j} \le C_2 (m_j^*)^{p_j-2} w_j \left(\frac{1}{m_j^*} \right), \; j = \overline{1,n}.$$

Лемма 4. *Пусть* $f \in H^p(a)$, $0 < p \le 1$, $g = a + 2 - p$, $a > -1$. *Тогда*

$$\int_0^1 (1-r)^{g-1} \left(\int_{-p}^{p} \left| f\left(re^{ij}\right) \right| dj \right)^p rdr < c \int_0^1 \int_{-p}^{p} (1-r)^a \left| f\left(re^{ij}\right) \right|^p rdrdj .$$

Лемма 5. *Пусть* $f \in H^{\vec{p}}(\vec{w})$, $\vec{p} = (p_1,...,p_n)$, $\vec{w} = (w_1,...,w_n)$, $0 < p_j \le 1$, $w_j \in S$, $a_{w_j} > -1$, $g_j = 2 - p_j$, $j = \overline{1,n}$. *Тогда*

$$\int_0^1 w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1} \dots \left(\int_0^1 w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1} \left(\int_0^1 w_1(1-r_1)(1-r_1)^{g_1-1} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times M_1^{p_1}(r_1,r_2,...,r_n,f) r_1 dr_1 \right)^{p_2/p_1} r_2 dr_2 \right)^{p_3/p_2} \dots r_n dr_n \le c \| f \|^{p_n}_{H^{\vec{p}}(\vec{w})},$$

где $M_1(r_1,r_2,...,r_n,f) = \int_{-p}^{p} \dots \int_{-p}^{p} \int_{-p}^{p} \left| f\left(r_1 e^{ij_1}, r_2 e^{ij_2}, ..., r_n e^{ij_n}\right) \right| dj_1 dj_2 \dots dj_n$.

Основной результат статьи содержится в теоремах 1-3. Напомним, что

$$l^\infty = \left\{ \left(a_{k_1,...,k_n} \right)_0^{+\infty} ; \sup_{k_1,...,k_n} \left| a_{k_1,...,k_n} \right| \le M \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\vec{p} = (p_1,...,p_n)$, $\vec{w} = (w_1,...,w_n)$, $0 < p_j \le 1$, $w_j \in S$, $j = \overline{1,n}$. $\left\{ l_{k_1,...,k_n} \right\}$ - *мультипликатор из* $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ *в* l^∞ *тогда и только тогда, когда*

$$l_{k_1,...,k_n} = O\left((k_1^*)^{1-\frac{2}{p_1}} \dots (k_n^*)^{1-\frac{2}{p_n}} \left[w_1\left(1/k_1^*\right) \right]^{1/p_1} \dots \left[w_n\left(1/k_n^*\right) \right]^{1/p_n} \right). \qquad (2)$$

Доказательство.

Пусть справедлива оценка (2). Докажем, что $\left\{ l_{k_1,\dots,k_n} \right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ в l^∞. Пусть $f(z) = f(z_1,\dots,z_n) = \sum\limits_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} a_{k_1,\dots,k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$. Тогда по лемме 1 имеем:

$$\left| a_{k_1,\dots,k_n} \right| \le c \frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[w\left(\frac{1}{k^*} \right) \right]^{1/p}} \| f \|_{H^{\vec{p}}(\vec{w})},$$

где

$$\frac{(k^*)^{2/p-1}}{\left[w\left(\frac{1}{k^*} \right) \right]^{1/p}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(k_j^*)^{2/p_j-1}}{\left[w_j\left(\frac{1}{k_j^*} \right) \right]^{1/p_j}}.$$

Следовательно,

$$\left| l_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n} \right| \le \tilde{c}.$$

Тогда $\left\{ l_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n} \right\} \in l^\infty$, то есть $\left\{ l_{k_1,\dots,k_n} \right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ в l^∞. Пусть теперь $\left\{ l_{k_1,\dots,k_n} \right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ в l^∞. Тогда по теореме о замкнутом графике

$$\sup_{k_1,\dots,k_n} \left| l_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n} \right| \le const \| f \|_{H^{\vec{p}}(\vec{w})}$$

Положим $f(z_1,\dots,z_n) = g(r_1 z_1,\dots,r_n z_n)$, $r_j < 1$, $g(z_1,\dots,z_n) = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-z_j)^{b_j}}$, $b_j > \frac{a_{w_j}+2}{p_j}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда

$$g(z_1,\dots,z_n) = \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} b_{k_1,\dots,k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},\ b_{k_1,\dots,k_n} \sim B(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Последнее утверждение означает, что $\exists c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1} \le b_{k_1,\dots,k_n} \le c_2(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Используя оценку леммы А, получим:

$$\| f \|_{H^{\vec{p}}(\vec{w})} = \left(\int_U w_n(1-|z_n|)\dots\left(\int_U w_2(1-|z_2|)\left(\int_U \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|1-r_j \overline{z}_j|^{b_j p_1}} \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times w_1(1-|z_1|)\, dm_2(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dm_2(z_2) \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots dm_2(z_n) \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$= \left(\int_U \frac{w_n(1-|z_n|)}{|1-r_n \overline{z}_n|^{b_n p_n}} dm_2(z_n) \right)^{\frac{1}{p_n}} \dots \left(\int_U \frac{w_2(1-|z_2|)}{|1-r_2 \overline{z}_2|^{b_2 p_2}} dm_2(z_2) \right)^{\frac{1}{p_2}} \times$$

$$\times \left(\int_U \frac{w_1(1-|z_1|)}{|1-r_1 \overline{z}_1|^{b_1 p_1}} dm_2(z_1) \right)^{\frac{1}{p_1}} \le const \frac{\left[w_n(1-r_n) \right]^{1/p_n}}{(1-r_n)^{(b_n p_n - 2)/p_n}} \dots \frac{\left[w_2(1-r_2) \right]^{1/p_2}}{(1-r_2)^{(b_2 p_2 - 2)/p_2}} \times$$

$$\times\frac{\left[w_1\left(1-r_1\right)\right]^{1/p_1}}{\left(1-r_1\right)^{(b_1p_1-2)/p_1}}.$$

Следовательно,

$$\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}\,r_1^{k_1}\dots r_n^{k_n}\le const\,\frac{\left[w_n\left(1-r_n\right)\right]^{1/p_n}}{\left(1-r_n\right)^{(b_np_n-2)/p_n}}\times$$

$$\times\dots\frac{\left[w_2\left(1-r_2\right)\right]^{1/p_2}}{\left(1-r_2\right)^{(b_2p_2-2)/p_2}}\,\frac{\left[w_1\left(1-r_1\right)\right]^{1/p_1}}{\left(1-r_1\right)^{(b_1p_1-2)/p_1}}.$$

Положим $r_j=1-\dfrac{1}{k_j^*}$, если $k_j^*\ge 2$, и $r_j=1-\dfrac{1}{2k_j^*}$, если $k_j^*=1$, $j=\overline{1,n}$. Тогда

$$\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}\le const\,\frac{\left[w_n\left(\frac{1}{k_n^*}\right)\right]^{1/p_n}}{\left(\frac{1}{k_n^*}\right)^{(b_np_n-2)/p_n}}\dots\frac{\left[w_2\left(\frac{1}{k_2^*}\right)\right]^{1/p_2}}{\left(\frac{1}{k_2^*}\right)^{(b_2p_2-2)/p_2}}\times$$

$$\times\frac{\left[w_1\left(\frac{1}{k_1^*}\right)\right]^{1/p_1}}{\left(\frac{1}{k_1^*}\right)^{(b_1p_1-2)/p_1}}.$$

Таким образом,

$$\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|\le const(k_1^*)^{1-\frac{2}{p_1}}\dots(k_n^*)^{1-\frac{2}{p_n}}\left[w_1\left(1/k_1^*\right)\right]^{1/p_1}\dots\left[w_n\left(1/k_n^*\right)\right]^{1/p_n}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть* $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $0<p_j\le 1$, $a_j<p_j$, $a_j>-1$, $j=\overline{1,n}$, $l_{k_1,\dots,k_n}=\prod_{j=1}^{n}l_{k_j}$. $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ *- мультипликатор из* $H^{\vec{p}}(\vec{a})$ *в* $l_A^{\vec{p}}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{m_2}\left(\sum_{k_1=0}^{m_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\dots(k_n^*)^2=$$

$$=O\left((m_1^*)^{(p_1-a_1)p_n/p_1}(m_2^*)^{(p_2-a_2)p_n/p_2}\dots(m_n^*)^{(p_n-a_n)}\right). \qquad (3)$$

Доказательство.

Пусть $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{a})$ в $l_A^{\vec{p}}$. Тогда

$$\left(\sum_{k_n=0}^{+\infty}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{\frac{1}{p_n}}\le const\left\|f\right\|_{H^{\vec{p}}(\vec{a})},$$

$$f(z)=f(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}a_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}.$$

Пусть $f(z_1,\dots,z_n)=g(r_1z_1,\dots,r_nz_n)$, $r_j<1$, $g(z_1,\dots,z_n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-z_j)^{b_j}}$, $b_j>\frac{a_j+2}{p_j}$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда

$$g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} b_{k_1,\dots,k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},\ b_{k_1,\dots,k_n}\sim B(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Для оценки $\|f\|_{H^{\vec p}(\vec a)}$ используем оценку леммы А:

$$\|f\|_{H^{\vec p}(\vec a)}=\left(\int_U(1-|z_n|)^{a_n}\dots\left(\int_U(1-|z_2|)^{a_2}\left(\int_U\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left|1-r_j\bar z_j\right|^{b_jp_1}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(1-|z_1|)^{a_1}\,dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}=$$

$$=\left(\int_U\frac{(1-|z_n|)^{a_n}}{\left|1-r_n\bar z_n\right|^{b_np_n}}dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}\dots\left(\int_U\frac{(1-|z_2|)^{a_2}}{\left|1-r_2\bar z_2\right|^{b_2p_2}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{1}{p_2}}\times$$

$$\times\left(\int_U\frac{(1-|z_1|)^{a_1}}{\left|1-r_1\bar z_1\right|^{b_1p_1}}dm_2(z_1)\right)^{\frac{1}{p_1}}\le const\,\frac{(1-r_n)^{a_n/p_n}}{(1-r_n)^{(b_np_n-2)/p_n}}\dots\frac{(1-r_2)^{a_2/p_2}}{(1-r_2)^{(b_2p_2-2)/p_2}}\times$$

$$\times\frac{(1-r_1)^{a_1/p_1}}{(1-r_1)^{(b_1p_1-2)/p_1}}=const\,(1-r_1)^{a_1/p_1+2/p_1-b_1}(1-r_2)^{a_2/p_2+2/p_2-b_2}\dots\times$$

$$\times(1-r_n)^{a_n/p_n+2/p_n-b_n}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^{(b_1-1)p_1}(k_2^*)^{(b_2-1)p_2}\dots(k_n^*)^{(b_n-1)p_n}r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_2}\dots\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times r_n^{k_np_n}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le const\,(1-r_1)^{(a_1-b_1p_1+2)\frac{p_n}{p_1}}(1-r_2)^{(a_2-b_2p_2+2)\frac{p_n}{p_2}}\times$$

$$\times(1-r_n)^{a_n-b_np_n+2},$$

то есть

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}r_n^{k_np_n}(k_n^*)^{(b_n-1)p_n}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}r_2^{k_2p_2}(k_2^*)^{(b_2-1)p_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^{(b_1-1)p_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times r_1^{k_1p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le const\,(1-r_1)^{(a_1-b_1p_1+2)\frac{p_n}{p_1}}(1-r_2)^{(a_2-b_2p_2+2)\frac{p_n}{p_2}}\times$$

$$\times(1-r_n)^{a_n-b_np_n+2}.$$

Пусть $b_j = 1 + \frac{2}{p_j} > \frac{a_j + 2}{p_j}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда

$$r_1^{N_1 p_n} r_2^{N_2 p_n} \ldots r_n^{N_n p_n} \sum_{k_n=0}^{N_n} (k_n^*)^2 \left(\ldots \left(\sum_{k_2=0}^{N_2} (k_2^*)^2 \left(\sum_{k_1=0}^{N_1} \left| l_{k_1,\ldots,k_n} \right|^{p_1} (k_1^*)^2 \right)^{p_2/p_1} \right)^{p_3/p_2} \ldots \right)^{p_n/p_{n-1}} \le$$

$$\le const\,(1-r_1)^{(a_1-p_1)\frac{p_n}{p_1}} (1-r_2)^{(a_2-p_2)\frac{p_n}{p_2}} \ldots (1-r_n)^{a_n-p_n}.$$

Положим $r_j = 1 - \frac{1}{k_j^*}$, если $k_j^* \ge 2$, и $r_j = 1 - \frac{1}{2k_j^*}$, если $k_j^* = 1$, $j = \overline{1,n}$. Тогда

$$\sum_{k_n=0}^{N_n} \ldots \left(\sum_{k_2=0}^{N_2} \left(\sum_{k_1=0}^{N_1} \left| l_{k_1,\ldots,k_n} \right|^{p_1} (k_1^*)^2 \right)^{p_2/p_1} (k_2^*)^2 \right)^{p_3/p_2} \ldots (k_n^*)^2 \le$$

$$\le const (N_1^*)^{(p_1-a_1)\frac{p_n}{p_1}} (N_2^*)^{(p_2-a_2)\frac{p_n}{p_2}} \ldots (N_n^*)^{p_n-a_n}.$$

Первая часть теоремы доказана. Пусть теперь имеет место оценка (3). Докажем, что $\{ l_{k_1,\ldots,k_n} \}$ - мультипликатор из $H^{\vec p}(\vec a)$ в $l_A^{\vec p}$. Пусть $f \in H^{\vec p}(\vec a)$. Сначала установим сходимость ряда:

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty} \left(\ldots \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \left| l_{k_1,\ldots,k_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \right|^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \right)^{p_3/p_2} \ldots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} < +\infty.$$

По лемме 2 из (3) имеем:

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty} \left| l_{k_j} \right|^{p_j} \le c(m_j^*)^{p_j - a_j - 2}, \ j = \overline{1,n}.$$

Так как $0 < p_j \le 1$, $a_j < p_j$, $a_j > -1$, то $p_j - a_j - 2 < 0$, $j = \overline{1,n}$. Положим $s_0 = 0$, $s_{k_j} = 1 - \left\{ \sum_{t_j=k_j}^{+\infty} \left| l_{t_j} \right|^{p_j} \right\}^{\frac{1}{g_j}}$, $k_j = 1,2,3,\ldots$, $l_{k_j} \ge 0$ и $\sum_{k_j=0}^{+\infty} \left| l_{k_j} \right|^{p_j} = 1$, $g_j = a_j - p_j + 2$, $j = \overline{1,n}$. Тогда $s_{k_j} \to 1$ при $k_j \to +\infty$, $j = \overline{1,n}$. По лемме 4

$$\int_0^1 (1-r_n)^{g_n - 1} \ldots \left(\int_0^1 (1-r_2)^{g_2-1} \left(\int_0^1 (1-r_1)^{g_1-1} M_1^{p_1}(r_1, r_2, \ldots, r_n, f) r_1 dr_1 \right)^{p_2/p_1} r_2 dr_2 \right)^{p_3/p_2} \times$$

$$\times \ldots r_n dr_n < +\infty.$$

Так как $M_1(r_1, r_2, \ldots, r_n, f) \ge r_1^{k_1} r_2^{k_2} \ldots r_n^{k_n} \left| a_{k_1,\ldots,k_n} \right|$, то

$$+\infty > \sum_{k_n=0}^{+\infty} \int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}} (1-r_n)^{g_n-1} \ldots \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}} (1-r_2)^{g_2-1} \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}} (1-r_1)^{g_1-1} \times \right.\right.$$

$$\times M_1^{p_1}(r_1,r_2,...,r_n,f)\,dr_1\Bigg)^{p_2/p_1} dr_2\Bigg)^{p_3/p_2} ...dr_n \ge \sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}(1-r_n)^{g_n-1}...\times$$

$$\times\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}(1-r_2)^{g_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\,r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_1}...r_n^{k_np_1}\left|a_{k_1,...,k_n}\right|^{p_1}\times\right.\right.$$

$$\times dr_1\Bigg)^{p_2/p_1} dr_2\Bigg)^{p_3/p_2} ...dr_n = \sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}} r_n^{k_np_n}(1-r_n)^{g_n-1}\,dr_n\left(...\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}} r_2^{k_2p_2}(1-r_2)^{g_2-1}\,dr_2\times\right.\right.$$

$$\times\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,...,k_n}\right|^{p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}r_1^{k_1p_1}\,dr_1\right)^{p_2/p_1}\Bigg)^{p_3/p_2}...\Bigg)^{p_n/p_{n-1}} \ge$$

$$\ge \sum_{k_n=0}^{+\infty} s_{k_n}^{k_np_n}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}(1-r_n)^{g_n-1}\,dr_n\left(...\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} s_{k_2}^{k_2p_2}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}(1-r_2)^{g_2-1}\,dr_2\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,...,k_n}\right|^{p_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\times s_{k_1}^{k_1p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\,dr_1\Bigg)^{p_2/p_1}\Bigg)^{p_3/p_2}...\Bigg)^{p_n/p_{n-1}} =$$

$$= const\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(...\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,...,k_n}\right|^{p_1} s_{k_1}^{k_1p_1}\, s_{k_2}^{k_2p_1}\,...s_{k_n}^{k_np_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\times\left\{\left(1-s_{k_1}\right)^{g_1}-\left(1-s_{k_1+1}\right)^{g_1}\right\}\left\{\left(1-s_{k_2}\right)^{g_2}-\left(1-s_{k_2+1}\right)^{g_2}\right\}^{\frac{p_1}{p_2}}\times$$

$$\times...\times\left\{\left(1-s_{k_n}\right)^{g_n}-\left(1-s_{k_n+1}\right)^{g_n}\right\}^{\frac{p_1}{p_n}}\Bigg)^{p_2/p_1}\Bigg)^{p_3/p_2}...\Bigg)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Так как

$$\left(1-s_{k_1}\right)^{g_1}-\left(1-s_{k_1+1}\right)^{g_1} = l_{k_1}^{p_1},$$

$$\left\{\left(1-s_{k_j}\right)^{g_j}-\left(1-s_{k_j+1}\right)^{g_j}\right\}^{\frac{p_1}{p_j}} = l_{k_j}^{p_j\cdot\frac{p_1}{p_j}} = l_{k_j}^{p_1},\quad j=\overline{2,n},$$

то

$$\left\{\left(1-s_{k_1}\right)^{g_1}-\left(1-s_{k_1+1}\right)^{g_1}\right\}\left\{\left(1-s_{k_2}\right)^{g_2}-\left(1-s_{k_2+1}\right)^{g_2}\right\}^{\frac{p_1}{p_2}}\times$$

$$\times...\times\left\{\left(1-s_{k_n}\right)^{g_n}-\left(1-s_{k_n+1}\right)^{g_n}\right\}^{\frac{p_1}{p_n}} = l_{k_1}^{p_1}\,l_{k_2}^{p_1}...\,l_{k_n}^{p_1} = l_{k_1,k_2,...,k_n}^{p_1}.$$

Следовательно,

$$+\infty > const\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1} s_{k_1}^{k_1p_1} s_{k_2}^{k_2p_1}\dots s_{k_n}^{k_np_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Кроме того,

$$\left\{\sum_{t_j=k_j}^{+\infty}\left|l_{t_j}\right|^{p_j}\right\}^{\frac{1}{g_j}} \le const\left(k_j^*\right)^{(p_j-a_j-2)\cdot\frac{1}{a_j+2-p_j}} = const\cdot\frac{1}{k_j^*},\ j=\overline{1,n}.$$

Но тогда

$$s_{k_1}^{k_1p_1} = \left(1-\left\{\sum_{t_1=k_1}^{+\infty}\left|l_{t_1}\right|^{p_1}\right\}^{\frac{1}{g_1}}\right)^{k_1p_1} \ge \left(1-\frac{c}{k_1^*}\right)^{k_1p_1} \to e^{-cp_1} > 0.$$

Аналогично,

$$s_{k_2}^{k_2p_1} \ge \left(1-\frac{c}{k_2^*}\right)^{k_2p_1} \to e^{-cp_1} > 0,$$

…………….

$$s_{k_n}^{k_np_1} \ge \left(1-\frac{c}{k_n^*}\right)^{k_np_1} \to e^{-cp_1} > 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} < +\infty,$$

то есть $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec p}(\vec a)$ в $l_A^{\vec p}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть* $\vec p=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec w=(w_1,\dots,w_n)$, $0<p_j\le 1$, $w_j\in S$, $a_{w_j}<p_j$, $j=\overline{1,n}$, $l_{k_1,\dots,k_n}=\prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$. $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ *- мультипликатор из* $H^{\vec p}(\vec w)$ *в* $l_A^{\vec p}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\dots\left(\sum_{k_2=0}^{m_2}\left(\sum_{k_1=0}^{m_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}\dots(k_n^*)^2 =$$

$$=O\left((m_1^*)^{p_n}(m_2^*)^{p_n}\dots(m_n^*)^{p_n}\left[w_1\left(\frac{1}{m_1^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_1}}\left[w_2\left(\frac{1}{m_2^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_2}}\dots w_n\left(\frac{1}{m_n^*}\right)\right). \tag{4}$$

Доказательство.

Пусть $\left\{l_{k_1,\dots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec p}(\vec w)$ в $l_A^{\vec p}$. Тогда по теореме о замкнутом графике

$$\left(\sum_{k_n=0}^{+\infty}\cdots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\dots,k_n}a_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\cdots\right)^{\frac{1}{p_n}}\le const\|f\|_{H_p^{\vec r}(\vec w)},$$

$$f(z)=f(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}a_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}.$$

Пусть $f(z_1,\dots,z_n)=g(r_1z_1,\dots,r_nz_n)$, $r_j<1$, $g(z_1,\dots,z_n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-z_j)^{b_j}}$, $b_j>\frac{a_{w_j}+2}{p_j}$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда

$$g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}b_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},\ b_{k_1,\dots,k_n}\sim B(k_1^*)^{b_1-1}\dots(k_n^*)^{b_n-1}.$$

Используя оценку леммы А, получим:

$$\|f\|_{H_p^{\vec r}(\vec w)}=\left(\int_U w_n(1-|z_n|)\dots\left(\int_U w_2(1-|z_2|)\left(\int_U\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left|1-r_j\bar z_j\right|^{b_jp_1}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times w_1(1-|z_1|)\,dm_2(z_1)\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}=$$

$$=\left(\int_U\frac{w_n(1-|z_n|)}{\left|1-r_n\bar z_n\right|^{b_np_n}}dm_2(z_n)\right)^{\frac{1}{p_n}}\dots\left(\int_U\frac{w_2(1-|z_2|)}{\left|1-r_2\bar z_2\right|^{b_2p_2}}dm_2(z_2)\right)^{\frac{1}{p_2}}\times$$

$$\times\left(\int_U\frac{w_1(1-|z_1|)}{\left|1-r_1\bar z_1\right|^{b_1p_1}}dm_2(z_1)\right)^{\frac{1}{p_1}}\le const\frac{\left[w_n(1-r_n)\right]^{1/p_n}}{(1-r_n)^{(b_np_n-2)/p_n}}\dots\frac{\left[w_2(1-r_2)\right]^{1/p_2}}{(1-r_2)^{(b_2p_2-2)/p_2}}\times$$

$$\times\frac{\left[w_1(1-r_1)\right]^{1/p_1}}{(1-r_1)^{(b_1p_1-2)/p_1}}.$$

Возьмем $b_j=1+\frac{2}{p_j}>\frac{a_{w_j}+2}{p_j}$, $j=\overline{1,n}$. Тогда

$$\|f\|_{H_p^{\vec r}(\vec w)}\le const\frac{\left[w_n(1-r_n)\right]^{1/p_n}}{1-r_n}\dots\frac{\left[w_2(1-r_2)\right]^{1/p_2}}{1-r_2}\frac{\left[w_1(1-r_1)\right]^{1/p_1}}{1-r_1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}\left(\dots\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,\dots,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^{\frac{2}{p_1}p_1}(k_2^*)^{\frac{2}{p_2}p_1}\dots(k_n^*)^{\frac{2}{p_n}p_1}r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_1}\dots\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times r_n^{k_np_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}\le const\frac{\left[w_1(1-r_1)\right]^{1/p_1}}{1-r_1}\frac{\left[w_2(1-r_2)\right]^{1/p_2}}{1-r_2}\dots\times$$

$$\times\frac{\left[w_n\left(1-r_n\right)\right]^{1/p_n}}{1-r_n}.$$

Тем более

$$r_1^{N_1p_n}r_2^{N_2p_n}...r_n^{N_np_n}\sum_{k_n=0}^{N_n}(k_n^*)^2\left(...\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}(k_2^*)^2\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,...,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}...\right)^{p_n/p_{n-1}}\le$$

$$\le const\frac{\left[w_1\left(1-r_1\right)\right]^{p_n/p_1}}{\left(1-r_1\right)^{p_n}}\frac{\left[w_2\left(1-r_2\right)\right]^{p_n/p_2}}{\left(1-r_2\right)^{p_n}}...\frac{w_n\left(1-r_n\right)}{\left(1-r_n\right)^{p_n}}.$$

Положим $r_j=1-\frac{1}{k_j^*}$, если $k_j^*\ge 2$, и $r_j=1-\frac{1}{2k_j^*}$, если $k_j^*=1$, $j=\overline{1,n}$. Тогда

$$\sum_{k_n=0}^{N_n}...\left(\sum_{k_2=0}^{N_2}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1}\left|l_{k_1,...,k_n}\right|^{p_1}(k_1^*)^2\right)^{p_2/p_1}(k_2^*)^2\right)^{p_3/p_2}...(k_n^*)^2\le$$

$$\le const(N_1^*)^{p_n}(N_2^*)^{p_n}...(N_n^*)^{p_n}\left[w_1\left(\frac{1}{N_1^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_1}}\left[w_2\left(\frac{1}{N_2^*}\right)\right]^{\frac{p_n}{p_2}}...w_n\left(\frac{1}{N_n^*}\right).$$

Первая часть теоремы доказана. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $f\in H^{\vec{p}}(\vec{w})$. Докажем, что

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(...\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,...,k_n}a_{k_1,...,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}...\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}<+\infty.$$

По лемме 3 из (4) имеем:

$$\sum_{k_j=m_j}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}\le c(m_j^*)^{p_j-2}w_j\left(\frac{1}{m_j^*}\right),\ j=\overline{1,n}.$$

Положим $s_0=0$, $s_{k_j}=1-\left\{\frac{\sum_{t_j=k_j}^{+\infty}\left|l_{t_j}\right|^{p_j}}{w_j\left(1-s_{k_j}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_j}}$, $k_j=1,2,3,...$, $l_{k_j}\ge 0$ и $\sum_{k_j=0}^{+\infty}\left|l_{k_j}\right|^{p_j}=1$, $g_j=2-p_j$, $j=\overline{1,n}$. Так как $\left(1-s_{k_j}\right)^{g_j}w_j\left(1-s_{k_j}\right)=\sum_{t_j=k_j}^{+\infty}\left|l_{t_j}\right|^{p_j}$ и $w_j(t)$ не обращается в нуль на $(0,1)$, то при $k_j\to+\infty$ $s_{k_j}\to 1$, $j=\overline{1,n}$. По лемме 5 имеем:

$$\int_0^1 w_n\left(1-r_n\right)\left(1-r_n\right)^{g_n-1}...\left(\int_0^1 w_2\left(1-r_2\right)\left(1-r_2\right)^{g_2-1}\left(\int_0^1 w_1\left(1-r_1\right)\left(1-r_1\right)^{g_1-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times M_1^{p_1}(r_1,r_2,...,r_n,f)r_1dr_1\right)^{p_2/p_1}r_2dr_2\right)^{p_3/p_2}...r_ndr_n<+\infty.$$

Так как $M_1\left(r_1,r_2,\ldots,r_n,f\right)\ge r_1^{k_1}r_2^{k_2}\ldots r_n^{k_n}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|$, то

$$+\infty>\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times w_1(1-r_1)M_1^{p_1}(r_1,r_2,\ldots,r_n,f)\,dr_1\right)^{p_2/p_1}dr_2\right)^{p_3/p_2}\ldots dr_n\ge\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}\ldots\times$$

$$\times\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}w_1(1-r_1)(1-r_1)^{g_1-1}\,r_1^{k_1p_1}r_2^{k_2p_1}\ldots r_n^{k_np_1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}dr_1\right)^{p_2/p_1}dr_2\right)^{p_3/p_2}\ldots dr_n=\sum_{k_n=0}^{+\infty}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}r_n^{k_np_n}w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}dr_n\times$$

$$\times\left(\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}r_2^{k_2p_2}w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}dr_2\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}r_1^{k_1p_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times w_1(1-r_1)\,dr_1\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}\ge\sum_{k_n=0}^{+\infty}s_{k_n}^{k_np_n}\int_{s_{k_n}}^{s_{k_n+1}}w_n(1-r_n)(1-r_n)^{g_n-1}dr_n\times$$

$$\times\left(\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}s_{k_2}^{k_2p_2}\int_{s_{k_2}}^{s_{k_2+1}}w_2(1-r_2)(1-r_2)^{g_2-1}dr_2\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}s_{k_1}^{k_1p_1}\int_{s_{k_1}}^{s_{k_1+1}}(1-r_1)^{g_1-1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times w_1(1-r_1)\,dr_1\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Оценим интеграл

$$\int_{s_{k_j}}^{s_{k_j+1}}w_j\left(1-r_j\right)\left(1-r_j\right)^{g_j-1}dr_j,\quad j=\overline{1,n}.$$

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}w(1-r)(1-r)^{g-1}dr=\int_{1-s_{k+1}}^{1-s_k}w(u)u^{g-1}du=\left.\frac{w(u)u^g}{g}\right|_{1-s_{k+1}}^{1-s_k}+$$

$$+\int_{1-s_{k+1}}^{1-s_k}\frac{u^g}{g}w(u)\frac{e(u)}{u}du.$$

Следовательно,

$$g\int\limits_{1-s_{k+1}}^{1-s_k} w(u)u^{g-1}du-\int\limits_{1-s_{k+1}}^{1-s_k} u^{g-1}w(u)e(u)\,du=w(u)u^g\Big|_{1-s_{k+1}}^{1-s_k}.$$

Так как $g=2-p>1$, то $g-a_w>0$ $(a_w<1)$. Таким образом,

$$\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} w(1-r)(1-r)^{g-1}\,dr\geq const\left[w(1-s_k)(1-s_k)^g-w(1-s_{k+1})(1-s_{k+1})^g\right],$$

то есть

$$\int\limits_{s_{k_j}}^{s_{k_j+1}} w_j(1-r_j)(1-r_j)^{g_j-1}\,dr_j\geq const\Big[w_j\left(1-s_{k_j}\right)\left(1-s_{k_j}\right)^{g_j}-$$

$$-w_j\left(1-s_{k_j+1}\right)\left(1-s_{k_j+1}\right)^{g_j}\Big]=const\,l_{k_j}^{p_j},\quad j=\overline{1,n}.$$

Итак,

$$+\infty>const\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}s_{k_1}^{k_1p_1}s_{k_2}^{k_2p_1}\ldots s_{k_n}^{k_np_1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left|l_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}.$$

Оценим $s_{k_1}^{k_1p_1}$, $s_{k_2}^{k_2p_1}$,…, $s_{k_n}^{k_np_1}$. Для $s_{k_1}^{k_1p_1}$ имеем:

$$1-s_{k_1}=\left\{\frac{\sum\limits_{t_1=k_1}^{+\infty}\left|l_{t_1}\right|^{p_1}}{w_1\left(1-s_{k_1}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_1}}\leq const\left\{\frac{(k_1^*)^{p_1-2}w_1\left(1/k_1^*\right)}{w_1\left(1-s_{k_1}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_1}}.$$

Тогда

$$w_1\left(1-s_{k_1}\right)\left(1-s_{k_1}\right)^{2-p_1}\leq const\left(\frac{1}{k_1^*}\right)^{2-p_1}w_1\left(\frac{1}{k_1^*}\right).$$

Пусть $\Psi(t)=w_1(t)t^{2-p_1}$. Тогда последнее неравенство равносильно неравенству

$$\Psi\left(1-s_{k_1}\right)\leq\Psi\left(\frac{c}{k_1^*}\right). \tag{5}$$

Вычислим $\Psi'(t)$.

$$\Psi'(t)=(2-p_1)w_1(t)t^{1-p_1}-w_1(t)t^{2-p_1}\frac{e(t)}{t}=w_1(t)t^{1-p_1}\left(2-p_1-e(t)\right).$$

Но $e(t)\leq b_w$, поэтому

$$\Psi'(t)\geq w_1(t)t^{1-p_1}(2-p_1-b_w)>w_1(t)t^{1-p_1}(1-p_1)>0,\ \text{если}\ t>0.$$

Так как функция Ψ монотонно растет, то из оценки (5) следует, что

$$1-s_{k_1}\leq\frac{c}{k_1^*}.$$

Аналогично,

$$1-s_{k_2} \le \frac{c}{k_2^*}, \ldots, 1-s_{k_n} \le \frac{c}{k_n^*}.$$

Таким образом,

$$s_{k_1}^{k_1 p_1} = \left(1-\left\{\frac{\sum_{t_1=k_1}^{+\infty} \left|l_{t_1}\right|^{p_1}}{w_1\left(1-s_{k_1}\right)}\right\}^{\frac{1}{g_1}}\right)^{k_1 p_1} \ge \left(1-\frac{c}{k_1^*}\right)^{k_1 p_1} \to e^{-cp_1} > 0.$$

Аналогично,

$$s_{k_2}^{k_2 p_1} \ge \left(1-\frac{c}{k_2^*}\right)^{k_2 p_1} \to e^{-cp_1} > 0,$$

....

$$s_{k_n}^{k_n p_1} \ge \left(1-\frac{c}{k_n^*}\right)^{k_n p_1} \to e^{-cp_1} > 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_n=0}^{+\infty}\left(\ldots\left(\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty}\left|l_{k_1,\ldots,k_n} a_{k_1,\ldots,k_n}\right|^{p_1}\right)^{p_2/p_1}\right)^{p_3/p_2}\ldots\right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} < +\infty,$$

то есть $\left\{l_{k_1,\ldots,k_n}\right\}$ - мультипликатор из $H^{\vec{p}}(\vec{w})$ в $l_A^{\vec{p}}$. Теорема доказана.

Сформулируем несколько следствий основных теорем. Пусть $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, тогда

$$H^p(\vec{w}) = \left\{f \in H\left(U^n\right) : \int_{U^n} w_1\left(1-|z_1|\right)\ldots w_n\left(1-|z_n|\right)\left|f\left(z_1,\ldots,z_n\right)\right|^p dm_{2n}\left(z_1,\ldots,z_n\right) < +\infty\right\},$$

$$l^p = \left\{w = \left(w_{k_1,\ldots,k_n}\right) : \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{+\infty} \left|w_{k_1,\ldots,k_n}\right|^p < +\infty\right\}.$$

Следствие 1. *Пусть* $\vec{w} = (w_1,\ldots,w_n)$, $0 < p \le 1$, $w_j \in S$, $a_{w_j} < p$, $j = \overline{1,n}$, $l_{k_1,\ldots,k_n} = \prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$. $\left\{l_{k_1,\ldots,k_n}\right\}$ *- мультипликатор из* $H^p(\vec{w})$ *в* l^p *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}\ldots\sum_{k_2=0}^{m_2}\sum_{k_1=0}^{m_1}\left|l_{k_1,\ldots,k_n}\right|^p (k_1^*)^2(k_2^*)^2\ldots(k_n^*)^2 =$$

$$= O\left((m_1^*)^p(m_2^*)^p\ldots(m_n^*)^p w_1\left(\frac{1}{m_1^*}\right)w_2\left(\frac{1}{m_2^*}\right)\ldots w_n\left(\frac{1}{m_n^*}\right)\right).$$

Положим для простоты $n=1$.

Следствие 2. *Пусть* $0 < p \le 1$, $w \in S$, $a_w < p$. $\left\{l_k\right\}$ *- мультипликатор из* $H^p(w)$ *в* l^p *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=0}^{m}\left|l_k\right|^p (k^*)^2 = O\left((m^*)^p w\left(\frac{1}{m^*}\right)\right).$$

В частном случае, если $w(t) = t^a$, получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $0<p\leq 1,\ a<p,\ a>-1.$ $\{l_k\}$ *- мультипликатор из* $H^p(a)$ *в* l^p *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=0}^{m}\left|l_k\right|^p (k^*)^2 = O\left((m^*)^{p-a}\right).$$

Как следствие теоремы 1 можно получить результат, установленный С.В.Шведенко (см. [2]). Пусть

$$A_a^p=\left\{f\in H\left(U^n\right): \int\limits_{U^n}\left(1-|z_1|\right)^{a_1}...\left(1-|z_n|\right)^{a_n}\left|f\left(z_1,...,z_n\right)\right|^p dm_{2n}\left(z_1,...,z_n\right)<+\infty\right\}.$$

Следствие 4. *Пусть* $0<p\leq 1,\ a_j<p,\ a_j>-1,\ j=\overline{1,n}$. *Если*

$$f\left(z_1,...,z_n\right)=\sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1}...z_n^{k_n}$$

принадлежит классу A_a^p, *то*

$$\sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty}\frac{\left|a_{k_1,...,k_n}\right|^p}{\left(k_1+1\right)^{a_1+3-p}...\left(k_n+1\right)^{a_n+3-p}}\leq c\|f\|_{A_a^p}.$$

Доказательство.

Докажем, что

$$l_{k_1,...,k_n}=\frac{1}{\left(k_1+1\right)^{(a_1+3-p)/p}...\left(k_n+1\right)^{(a_n+3-p)/p}}$$

является мультипликатором из A_a^p в l^p. По следствию 1 это будет верно, если

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}...\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{\left(k_1^*\right)^2...\left(k_n^*\right)^2}{\left(k_1+1\right)^{a_1+3-p}...\left(k_n+1\right)^{a_n+3-p}}\leq\sum_{k_n=0}^{m_n}...\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{\left(k_1+1\right)^2...\left(k_n+1\right)^2}{\left(k_1+1\right)^{a_1+3-p}...\left(k_n+1\right)^{a_n+3-p}}=$$

$$=\sum_{k_n=0}^{m_n}...\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{1}{\left(k_1+1\right)^{a_1+1-p}...\left(k_n+1\right)^{a_n+1-p}}\leq cm_1^{p-a_1}...m_n^{p-a_n}.$$

Так как $p+1-a_j>p-a_j>0,\ j=\overline{1,n}$, то условие

$$\sum_{k_n=0}^{m_n}...\sum_{k_1=0}^{m_1}\frac{1}{\left(k_1+1\right)^2...\left(k_n+1\right)^2}\left(k_1+1\right)^{p+1-a_1}...\left(k_n+1\right)^{p+1-a_n}\leq cm_1^{p-a_1}...m_n^{p-a_n}$$

эквивалентно условию

$$\sum_{k_n=m_n}^{+\infty}...\sum_{k_1=m_1}^{+\infty}\frac{1}{\left(k_1+1\right)^2...\left(k_n+1\right)^2}\leq cm_1^{p-a_1-(p+1-a_1)}...m_n^{p-a_n-(p+1-a_n)}=\frac{c}{m_1...m_n},$$

которое, очевидно, выполняется. Утверждение доказано.

Из теоремы 3 следует, что если вместо a_j+3-p брать $b_j<a_j+3-p,\ j=\overline{1,n}$, то утверждение будет не верно.

The paper describes the multipliers of the form $l_{k_1,...,k_n}=\prod_{j=1}^{n} l_{k_j}$ of the space $H^{\vec p}(\vec w)$ in space $l_A^{\vec p}$.

The key words: *holomorphic function, the unit polydisc, regularly varying functions in* $(0,1]$, *space* $H^{\vec p}(\vec w)$, *space* $l_A^{\vec p}$, *multipliers.*

Список литературы

1.Шамоян Ф.А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций//Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31. № 2. С.197-215.

1.Шведенко С.В. О коэффициентах Тейлора функций из пространств Бергмана в поликруге//Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 2. С.325-328.

2.Duren P.L., Theory of H^p spaces, New York and London, Acad. press, 1970.

3.Duren P.L., Shields A.L., Coefficient multipliers of H^p and B^p spaces//Pacif. Yourn. Math. 1970. V. 32. P.69-78.

4.Duren P.L., Shields A.L., Properties of H^p $(0 < p < 1)$ and its containing Banach spaces//Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P.255-262.

5.Oberlin D.M., Two multiplier theorems for $H^1(U^2)$//Proc. Edin. Math. Soc. 1977. V. 22. № 1. P.43-47.

Об авторе

О. В. Ярославцева – канд. доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 551.482.213/214 (2Р-Бр)

КОМПЛЕКСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КАРСТОВЫХ ОЗЕР БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ

Л.М. Ахромеев, Ю.Г. Данилов, В.Т. Демихов,
С.В. Кузнецов, Л.И. Токман, И.В. Шарапаев

В статье дается морфометрическая, гидрографическая, гидробиологическая, гидрохимическая и рекреационная характеристики наиболее известных карстовых озер Брянской области.
Ключевые слова: *озеро, карст, гидрография, гидрология, гидробиология, гидрохимия, рекреация.*

Введение

Брянская область богата озерами, однако, крупных озер здесь немного. По происхождению озерных котловин они относятся к трем основным типам: пойменные (озера-старицы и реликтовые), ледниковые и карстовые. Одними из самых интересных озер являются карстовые. На территории области они приурочены к районам с близким залеганием к поверхности отложениям меловых пород. Образовались они в результате провалов карстующихся горных пород и заполнения котловин водой. Эти озера имеют значительную глубину. Форма их круглая или овальная, берега ровные. Воды озер связаны с подземными карстовыми водами. Их циркуляция обеспечивает беспрерывный водообмен и исключает возможность накопления в придонных слоях вредных продуктов разложения органических остатков. В карстовых озерах мало питательных веществ, поэтому они бедны рыбой. Окруженные лесом берега карстовых озер очень живописны, что привлекает сюда большое количество отдыхающих. Карстовые озера Брянщины объявлены памятниками природы и взяты под охрану.

В августе 2008 г. нами были проведены комплексные исследования наиболее известных карстовых озер Брянской области: Святого и Бездонного (Жуковский район), Круглого (Брянский район). Особой красотой среди них выделяется лесное озеро Святое (Жуковский район), на характеристике которого мы остановимся подробнее.

Озеро Святое расположено в 350 метрах к юго-западу от разъезда 176 км. Железнодорожной ветки Брянск – Жуковка. Ближайший населенный пункт п. Ржаница расположен в 3 км к юго-востоку. От п. Ржаница до озера можно добраться не только по железной дороге, но и по автодороге с твердым покрытием Ржаница – Жуковка, а затем по проселочной грунтовой дороге, общее расстояние около 6 км.

Озеро имеет овальную форму (рисунок 1), расположено на второй надпойменной террасе р. Десны. Абсолютная отметка уреза воды в озере – 163,3 м, что превышает уровень воды в Десне почти на 20 м. Гидрографическая характеристика озера дана в таблице 1.

Берега озера низкие, часто заболоченные, имеются заторфованные участки; на кочках покрытых сфагнумом и клюквой, растет редкое для области «насекомоядное» растение – росянка круглолистная. Со всех сторон озеро окружено сосновым бором, подходящим к самой береговой кромке; встречаются и мелколиственные породы (береза и ольха). Кроме того, имеются заросли тростника и рогоза. Перепад высот на расстоянии 5–7 м от уреза воды незначительный, примерно на это же расстояние распространены заторфованные участки. Прибрежная часть озера характеризуется наличием сплавины, заиленного дна, поэтому для купания или рыбной ловли с берега необходимо устройство мостков. Подъезд к озеру возможен, но не во всех местах.

Вода в озере чистая, прозрачная, берега живописные, все это, а также относительно доступный подъезд, делает озеро привлекательным для отдыха. Озеро посещается рыбаками, туристами и отдыхающими. Здесь нередко проводятся туристические слеты, фестивали бардовской песни и т. д.

Таблица 1 – Морфометрическая характеристика озер

Название характеристики	оз. Святое	оз. Круглое	оз. Бездонное
Площадь зеркала озера, $\mathbf{f_0}$, га	9,5	9	13
Средняя высота бассейна над уровнем моря, **H,** м	170	205	194
Высота уреза воды, $\mathbf{h_{ур.\,воды}}$, м	163,3	191,8	193
Ширина озера: максимальная, м	340	240	400
Длина озера, **L,** м	390	280	430
Длина береговой линии, **S,** м	1160	800	1470
Объем воды, **W,** тыс. $м^3$	950	360	3900
Глубина: максимальная, $\mathbf{h_{макс.}}$, м	16,2	21,3	21,5

Физические свойства озерных вод

Исследование температурной стратификации водной толщи озер проводилось при малооблачной погоде с температурой воздуха +23 °С. Исследования воды оз. Святое свидетельствует о наличии прямой температурной стратификации, характерной для летнего времени года (рисунок 1). Хорошо выраженный слой температурного скачка появляется, в основном, в центральной части озера, а у берегов он или отсутствует, или нечеткий.

Величина относительной прозрачности воды в оз. Святом – 2,5 м, цвет воды на фоне диска синевато-зеленый. Эти гидробиологические показатели говорят об относительной чистоте вод озера и олиготрофном типе питания для водных организмов. Но в сравнении с подобными озерами (Круглым и Бездонным) данное озеро в большей степени подвержено антропогенному воздействию и поэтому проявляются признаки евтрофикации водной массы.

Исследование температурного режима Круглого озера свидетельствуют также о четкой температурной стратификации водной массы. Слой эпилимниона до глубины 2 м.

Металимнион более четкий, чем на оз. Бездонном до глубины 10 м. От 10 м до 14 м – гиполимнион. Четко выраженный слой температурного скачка свидетельствует об очень слабом перемешивании водной массы по вертикали и, как следствие малом количестве кислорода на глубинах более 10 м. Прозрачность воды более значительная, чем на Бездонном и достигает 5 м, цвет воды также синевато-зеленый. В сравнении с озерами Святым и Бездонным, Круглое озеро в большей степени является олиготрофным, это подтверждается величиной прозрачности, являющейся показателем гидробиологического режима.

Таблица 2 – Физические свойства озерных вод

Характеристики	оз. Святое	оз. Круглое	оз. Бездонное
Температура (°С) на глубине: 0,5 м	22,4	22,8	22,3
2 м	21,8	22,4	-
4 м	19,0	-	17,0
6 м	15,0	15,0	-
8 м	14,3	-	15,0
10 м	14,1	14,2	-
12 м	13,8	-	14,6
14 м		9,4	14,6
Прозрачность воды, м	2,5	5	2,7
Цвет воды	синевато-зеленый	синевато-зеленый	синевато-зеленый

Гидрографо-гидрологическая характеристика

Характер распределения изобат озер в целом повторяет конфигурацию береговой линии и подтверждает их карстовое происхождение. Максимальная глубина Святого озера достигает 16,2 м и зафиксирована в южной части озера. Котловина Круглого озера имеет два провала с максимальными глубинами 21,5 и 19,0 м. Края карстового провала находятся выше уреза воды в озере примерно на 5–7 м. Озеро имеет резкие переходы от мелководья к глубоководью. Максимальная глубина Бездонного озера 21,5 м зафиксирована в ее центральной части.

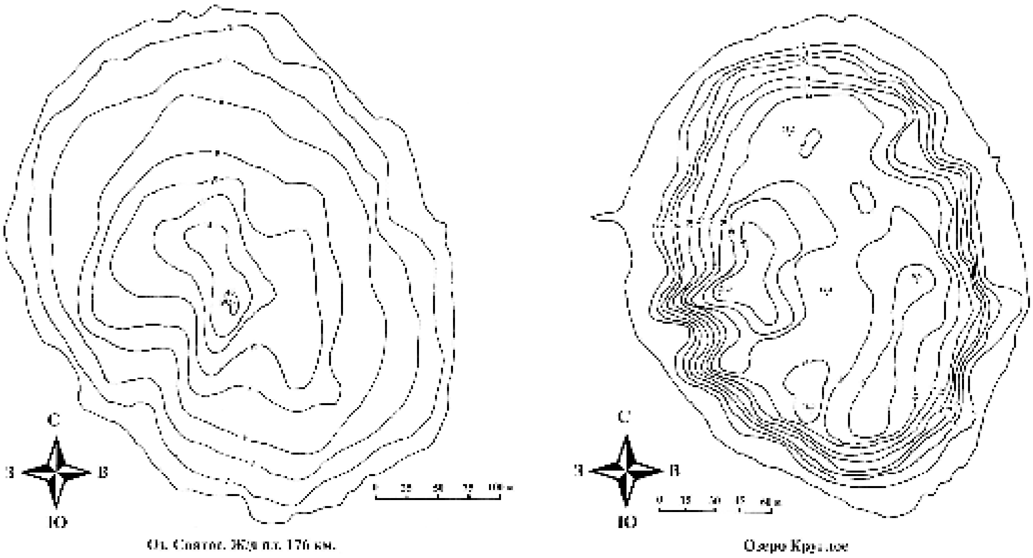


Рисунок 1 – Картосхемы озер в изобатах

Гидробиологическая характеристика

По всему периметру Святого озера прибрежная зона, шириной 30–50 м, имеет уклон в сторону котловины порядка 5°. Выше нее располагается сосновый лес с типичными дерново-слабоподзолистыми супесчаными почвами на флювиогляциальных песках.

Прибрежная и водная растительность в озере представлены в основном тростником обыкновенным, рдестом плавающим, кувшинкой белой, кубышкой желтой, частухой подорожниковой, сабельником болотным и разными видами осок. Ее распространение ограничено 10–20 м от берега.

Количество макрофитов в озере незначительно, хотя на некоторых участках их полоса от берега составляет до 15 м.

В целом трофика и сапробность водоема определялась преимущественно по показателям фитопланктона.

Фитопланктон озер в августе 2008 г. слагался видами из шести отделов водорослей: диатомовые, зеленые, динофитовые, криптофитовые, синезеленые и эвгленовые. В этот период численность фитопланктона в Святом озере составляла – 3 млн.кл./л, биомасса – 1,8 мг/л; в Круглом озере – 1,85 млн.кл./л, биомасса – 1,74 мг/л. (таблица 3, 4).

Основу флоры составляют диатомовые и зеленые водоросли, степень разнообразия которых не высока. В доминирующем комплексе Святого озера насчитывается 13 видов (в Круглом озере – 16 видов). Наиболее выраженным доминантом выступает род Cyclotella. Большинство видов фитопланктона относятся к беттасапробам и олигосапробам, биомасса фитопланктона невелика, однако высокая численность водорослей указывает на интенсивный обмен в водоеме, и позволяют характеризовать оз. Святое, как олиго-мезотрофный водоем, а Круглое озеро, как чрезвычайно бедное биогенными элементами, относится к дистрофным. Сообщества гидробионтов в озерах находятся в устойчивом состоянии, но из-за небольших размеров они чрезвычайно уязвимы к любым внешним воздействиям.

Таблица 3 – Список доминирующего комплекса фитопланктона оз. Святое

Отдел	Род	Вид	Числ., кл/л	Биомасса, мг/л	Ботанико-эколог. показатели				
BACILLARIOPHYTA	Cyclotella	Cyclotella sp.	2420000	0,832031179					
	Stephanodiscus	Stephanodiscus agassizensis Hakanson et Kling	50000	0,024911848	п	к	и	ал	o-b
	Stephanodiscus	Stephanodiscus Hantzchia Grunow	10000	0,009203885	п	к	и	ал	a-b
	Dinobryon	Dinobryon divergens var. angulatum (Sel.) Brunnth.	10000	0,005235988	п	к	и		
CHRYSOPHYTA	Malomonas	Malomonas sp.	20000	0,020453077					
	Chrysococcus	Chrysococcus biporus Skuja	10000	0,001278317	п	к	и	ин	o-b
DINPHYTA	Glenodinium	Glenodinium sp.	100000	0,797097324					
CRYPTOPHYTA	Chroomonas	Chroomonas acuta Utemohl	10000	0,001278317	п	к	и		b-a
EUGLENOPHYTA	Lepocinclis	Lepocinclis ovum (Ehrenberg) Lemmerman	10000	0,017671459	л	к	и	ин	a
CHLOROPHYTA	Chlamidomonas	Chlamidomonas sp.	10000	0,002208932					
	Westella	Westella botrioides (W. West) De-Wild.	160000	0,041417481	п	к	и		b
	Tetrastrum	Tetrastrum triangulare (Chodat) Kom.	160000	0,08					
	Tetrastrum	Tetrastrum komarekii Hind.	40000	0,0084375	п-б	к			
		Сумма:	3010000	1,841225307					

Таблица 4 – Список доминирующего комплекса фитопланктона оз. Круглое

Отдел	Род	Вид	числ., кл/л	биомасса, мг/л	Ботанико-эколог. показатели				
BACILLARIOPHYTA	Cyclotella	Cyclotella sp1	725000	0,281332076					
		Cyclotella sp.2	275000	0,176714587					
	Stephanodiscus	Stephanodiscus agassizensis Hakanson et Kling	50000	0,120264094	п	к	и	ал	o-b
	Stephanodiscus	Stephanodiscus Hantzchia Grunow	25000	0,045099035	п	к	и	ал	a-b
	Aulacosira	Aulacosira subarctica (O. Mull.) Haworth	75000	0,057984474	п	с-а	и	ал	
	Achnanthes	Achnanthes sp.	25000	0,018407769					
	Navicula	Navicula sp.1	25000	0,016566993					
	Nitzchia	Nitzchia sp2.	25000	0,069029135					
	Dinobryon	Dinobrion bavaricum Imhof	100000	0,012783173	п	б	и		o
	Synura	Synura sp.	25000	0,005522331					
CHRYSOPHYTA	Chrysococcus	Chrysococcus biporus Skuja	25000	0,005522331	п	к	и	ин	o-b
DINPHYTA	Glenodinium	Glenodinium sp.	250000	0,874778111					
CRYPTOPHYTA	Cryptomonas	Cryptomonas Marssonii Skuja	50000	0,037275733	п	к	и		o-b
EUGLENOPHYTA	Trachelomonas	Trachelomonas sp.	25000	0,005522331					
CHLOROPHYTA	Chlamidomonas	Chlamidomonas sp.1	75000	0,016566993					
	Chlamidomonas	Chlamidomonas sp.2	75000	0,000613592					
		Сумма:	1850000	1,743982758					

п – планктон, б – бентос, л – литораль

к – космополит, а – альпийский, с-а – северо-альпийский, б – бореальный

и – индифферент

ал – алкалифил+алкалибионт, ин – индиферент

а – альфасапробный, b – беттасапробный, o – олигосапробный вид.

Зообентос представлен личинками поденок стрекоз, хирономид, ручейников. Из моллюсков встречаются брюхоногие. В видовом составе рыб преобладают плотва, красноперка, окунь и щука. Рыбные запасы в целом незначительны.

Гидрохимическая характеристика

Анализ концентрации тяжелых металлов в водах исследованных водоемов показывает, что ни в одной пробе нет превышения предельно допустимых концентраций (ПДК для водопользования) загрязняющих элементов. Установлено, что распределение концентраций элементов жестко связано с береговой линией. Всплески концентраций (не превышающих ПДК) наблюдаются вблизи участков берега подверженных антропогенному воздействию.

Суммарный индекс загрязнения по тяжелым металлам Святого озера составляет – 0,1; Круглого – 0,46; Бездонного – 0,66.

Содержание тяжелых металлов, нитрат-, карбонат-, хлорид- ионов в воде водоемов приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Гидрохимическая характеристика

Озера	Точка взятия пробы	pH	Ni, мг/л	Pb, мг/л	Zn, мг/л	Cr, мг/л	Cu, мг/л	P, мг/л	Mn, мг/л	Ca	CO_3^{2-}	NO_3^-	Cl^-
	Значение ПДК		0,02	0,01	1,0	0,5	1,0	0,01	0,1				350
Оз. Святое	У северо-восточного берега	6,2	0,00054	0,00021	-	0,00028	0,00043	0,01366	0,00203	3	-	-	0,1
	В середине озера	7,4		0,000036	-			0,01366					
	У юго-западного берега	7,1											
Оз. Круглое	У юго-западного перепада глубин	6,9	0,0002	0,00016	0,0085	0,00004	0,00036	0,00312	0,00047	4	-	0,06	1,2
	У юго-западного берега	8,2	0,01421	0,00046	0,0375	-	0,00047	0,00793	0,00143				

Рекреационная оценка озер

Большинство карстовых озер Брянской области расположены по левобережью р. Десны. Наиболее доступно для посещения оз. Святое, расположенное в 0,3 км от железнодорожного разъезда 176 км по дороге Брянск – Жуковка. Вода в озере чистая берега заболочены слабо. Со всех сторон оно окружено сосновым лесом. Лесной воздух, насыщенный фитонцидами обладает ярко выраженными антимикробными свойствами, что придает озеру особую рекреационно-оздоровительную ценность. В целом рекреационная нагрузка на прибрежную часть озера незначительная, однако, во время проведения туристических слетов и фестивалей бардовской песни она может, достигает 400 чел/га. На берегах озера находятся бивуаки, которые используются туристами при совершении пеших походов.

В 15 км к северу-востоку от ст. Ржаница находится оз. Бездонное. Озеро расположено довольно далеко от транспортных магистралей и населенных пунктов, и попасть на него можно только транспортом с хорошей проходимостью. Тем не менее, на озере есть оборудованный пляж и спортивная площадка (инфраструктура бывшего пионерского лагеря), что привлекает сюда неорганизованных туристов во время пеших переходов. Озеро Бездонное окружено хвойно-широколиственными лесами с преобладанием сосны обыкновенной, березы бородавчатой, ели обыкновенной и дуба черешчатого. Удаленность озера от промышленных центров и населенных пунктов позволило природе сохраниться в первозданном виде, что делает его достаточно привлекательным для туристов.

В 10 км западнее развилки шоссе Фокино – Дятьково находится оз. Круглое. Берега озера чаще высокие, крутые, сложены песками, под которыми иногда видны выходы мергеля. Круглое озеро является одним из самых посещаемых карстовых озер Брянской области. Привлекательность данного водоема определяется не только девственной природой, но и наличием в непосредственной близости военно-мемориального комплекса «Партизанская стоянка отряда Виноградова». Рекреационная нагрузка в прибрежной части не постоянная, очаговая и зависит от сезона года и дней недели. Максимальна она в период работы «полевых» туристских стоянок детей школьного лагеря «Искорка» (расположен в 3 км от озера) и может достигать 100 чел/га. Берега озера частично оборудованы мостиками и настилами, обустроены площадки и бивуаки для туристов.

Карстовые озера области, безусловно, являются уникальными природными объектами для познавательного туризма, т. к. имеют уникальные ботанические, гидрологические и гидрографические характеристики, отличные от озер другого генезиса (редкие виды растений: сфагнум, клюква, росянка; бессточность, большая глубина, высокие показатели прозрачности воды и т. д.). Эти озера располагаются в пределах лесных ландшафтов и удалены от населенных пунктов, что способствует развитию здесь пешего туризма и джипинга. Большая глубина и прозрачность делает их привлекательными и для дайвинга.

Основной причиной сдерживающей развитие туризма вблизи подобных акваторий является отсутствие развитой инфраструктуры, что приводит к возникновению санитарно-экологических проблем, способствует загрязнению прибрежной зоны бытовым мусором; низкой, у многих туристов, остается и культура экологического поведения. Несомненно, карстовые озера Брянщины (а их в области более 10) являются перспективными для развития туризма и рекреации, однако в данном направлении требуется особый подход, направленный на сохранение их первозданной природы.

Morphometric, hydrographic, hydrobiological, hydrochemical and recreational characteristics of well-known karstic lakes of the Bryansk region are described in this article.
The key words are: *a lake, a karst, hydrography, hydrolody, hydrobiology, hydrochemistry and recreation.*

Об авторе

Л.М. Ахромеев – канд.,доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, ahromeev56@yandex.ru

Ю.Г. Данилов – канд.,доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, dan57@rambler.ru

В.Т. Демихов – канд.,доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, fir-sasha@yandex.ru

С.В. Кузнецов – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, passivoxid@mail.ru

Л.В. Токман – канд., ст. препод. Брянского государственного университета. им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

И.В. Шарапаев – ст. препод. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

УДК 581.526.425[581.426:34:[581:9]

ФЛОРИСТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИАЦИОННО ЗАГРЯЗНЕННЫХ СОСНОВЫХ ЛЕСОВ ЮГО-ЗАПАДНОЙ ЧАСТИ БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ

Булохов А. Д., Семенищенков Ю. А.

В статье приводятся результаты комплексных радиолого-геоботанических исследований на территории радиационно загрязненных юго-западных районов Брянской области. С использованием техники флористической классификации установлено 6 ассоциаций сосновых лесов в составе 4 союзов, 4 порядков, 4 классов и дана их характеристика. Сообщества синтаксонов распространены в различных зонах радиационного загрязнения от 1 до 40 ки/км^2. Мощность экспозиционной дозы варьирует в каждом типе сообществ. Отмечена высокая удельная активность ^{137}Cs в плодовых телах грибов, растениях травяно-кустарничкового и мохово-лишайникового ярусов.

Ключевые слова: *Брянская область, радиационно-загрязненные районы, флористическая классификация, сосновые леса.*

В результате аварии на Чернобыльской АЭС большая территория Брянской области была подвергнута радиоактивному загрязнению. По данным радиологической службы управления лесами Брянской области, радионуклидами загрязнено 228,5 тыс. га (30 % общей площади лесов государственного лесного фонда). При этом в зоне 40 Ки/км^2 находится 2,5 тыс. га, в зоне 15-40 Ки/км^2 – 42,4 тыс. га, в зоне 5-15 Ки/км^2 – 24 тыс. га и в зоне 15 Ки/км^2 – 159,6 тыс.га.

Растительный покров радиационно загрязненных районов не был объектом геоботанического обследования. Цель статьи – дать геоботаническую характеристику растительности и составить ее флористическую классификацию, выявить наиболее широко распространенные типы сообществ.

Геоботанические обследование территории Гордеевского, Клинцовского, Красногорского и Новозыбковского и Злынковского районов проведено в 2009 г. Территории этих районов находятся в пределах ландшафтов морено-зандровых равнин. Это Клинцовский, Новозыбковский, Злынковский ландшафты и ландшафты речных долин: Среднеипутский, Нижеипутский [Пастернак, 1967]. Здесь наиболее широко распространен природно-территориальный комплекс, сформированный мощными песками и супесями, с подзолистыми и дерново-подзолистыми почвами, преимущественно под сосновыми лесами. Значительные площади заняты террасами речных долин. Это волнистые поверхности первых-четвертых террас, сложенные мощными песками и супесями, с подзолистыми и дерново-подзолистыми почвами также под сосновыми и возникающими на их месте березовыми и осиновыми лесами.

Описание растительности проведено детально-маршрутным методом на пробных площадях в 400 м². В случае меньшей площади, занимаемой сообществом, описание проводилось в естественных границах фитоценозов. Оценка количественного участия видов дана по комбинированной шкале Ж. Браун-Бланке [Braun-Blanquet, 1964]: «r» – очень редки, 1-4 особи; «+» – разреженно и покрывают менее 1 % площадки; «1» – особи многочисленны, но покрывают не более 5 % площадки или довольно разрежены, но с такой же величиной покрытия; «2» – от 6 до 25 %; «3» – покрыто от 26 до 50 %; «4» – покрыто от 50 до 75 %; «5» – более 75 %.

Для разработки классификации растительности использовано 128 полных геоботанических описаний, выполненных во время полевых работ в 2009 г.

Флористическая классификация составлена в соответствии с общими установками метода Ж. Браун-Бланке [Braun-Blanquet, 1964; Westhoff, Maarel, 1978] на основе синтаксономической системы разработанной для Брянской области А. Д. Булоховым, А. И. Соломещем

[2003] и дополненной Ю. А. Семенищенковым [2009]. При установлении синтаксонов использованы единые блоки диагностических видов без разделения на характерные и дифференциальные. Типы лесорастительных условий даны по Д. В. Воробьеву [1953].

Номенклатура сосудистых растений дана по С. К. Черепанову [1995]; моховидных – по М. С. Игнатову и О. М. Афониной [1992], Н. А. Константиновой, А. Д. Потемкину, Р. Н. Шлякову [1992]; лишайников – по Определителю лишайников России [1996, 1998].

Экологические амплитуды синтаксонов по влажности, кислотности и обеспеченности минеральным азотом почвы рассчитаны по шкалам Х. Элленберга [Ellenberg et al., 1992].

Экспозиционная доза (МЭД, миллирентген/час или мР/час) на пробных площадках определена на поверхности почвы и на высоте 1 м от поверхности почвы радиометром РКСБ-104. Удельная активность (Бк/кг) радионуклида ^{137}Cs установлена с использованием спектрометрического комплекса «Гамма Плюс».

По результатам исследования, классификационная схема сосновых лесов юго-западных районов Брянской области имеет следующий вид:

Класс **VACCINIO–PICEETEA** Br.-Bl. 1939
Порядок ***Pinetalia sylvestris*** Oberdorfer 1957 (syn. ***Cladonio–Vaccinietalia*** Kiel land-Lund 1967)
Союз ***Dicrano–Pinion*** Libbert 1933
Асс. ***Cladonio–Pinetum*** Juraszek 1927
Асс. ***Dicrano–Pinetum*** Preising et Knapp ex Oberdorfer 1957
Асс. ***Molinio–Pinetum*** (E. Schmid. 1936) em. W. Matusz. 1973
Класс **PULSATILLO–PINETEA** Oberdorfer 1992
Порядок ***Pulsatillo–Pinetalia*** Oberdorfer 1992
Союз ***Cytiso ruthenici–Pinion*** Krausch 19962
Асс. ***Veronico incanae–Pinetum*** Bulokhov et Solomeshch 2003
Класс **VACCINIETEA ULIGINOSI** Tx. 1955
Порядок ***Vaccinietalia uliginosi*** Tx. 1955
Союз ***Ledo palustris–Pinion sylvestris*** Tx. 1955
Асс. ***Vaccinio uliginosi–Pinetum sylvestris*** Kleist 1929 em. Mat. 1962
Класс **QUERCO–FAGETEA** Br.- Bl. et Vlieger in Vlieger 1937
Порядок ***Quercetalia roboris*** R.Tx. 1931
Союз ***Vaccinio myrtilli–Quercion roboris*** Bulokhov et Solomeshch 2003
Асс. ***Vaccinio myrtilli–Quercetum roboris*** Bulokhov et Solomeshch 2003.

Ниже дается характеристика наиболее широко распространенных ассоциаций сосновых лесов радиационно загрязненных юго-западных районов Брянской области.

Ассоциация ***Cladonio-Pinetum*** Jurazek 1927 – Сосняк лишайниковый

Диагностические виды: *Pinus sylvestris* (доминант), *Cetraria islandica Cladonia alpestris. C. arbuscula, C. tenuis, C. furcata, Koeleria glauca* (табл.1 – 1).

Состав фитоценоза. Формула древостоя 10 С. Сомкнутость крон 0,5-0,6. Средняя высота 16 м. Сосна хорошо возобновляется. Подлесок не развит, но в нем постоянно присутствует ракитник русский (*Chamaecytisus ruthenicus*) иногда дрок красильный (*Genista tinctoria*). Встречается и кустарниковая форма дуба черешчатого. Травяно-кустарничковый ярус формирован ксерофильными олиготрофными видами: *Astragalus arenarius, Carex ericetorum, Koeleria glauca, Helichrysum arenarium, Thymus serpyllum, Pilosella officinarum.* Общее проективное покрытие 15-35 %. Мохово-лишайниковый ярус выражен неравномерно, сформирован *Pleurozium schreberi* с участием *Dicranum scoparium* и *Polytrichum piliferum.* Проективное покрытие 25-40 %. Флористическая насыщенность 22-28 видов на 400 м^2.

В сосново-лишайниковых борах обильны шляпочные грибы из класса базидиомицетов: *Boletus edulis* – белый гриб, *Lactarius deliciosus* – рыжик сосновый, *Lactarius rufus* –

горькушка, *Russula sp.* – сыроежка, *Tricholoma protentosum* – рядовка серая, *Trocholoma favovirens* – зеленушка.

В составе ассоциации установлено 2 субассоциации: ***Cladonio–Pinetum koelerietosum glaucae*** и ***Dicrano–Pinetum sylvestris quercetosum roboris*** [Булохов, Соломещ, 2003].

Экология. Ассоциация распространена по дюнам и возвышенным местам на зандровых равнинах и террасах р. Ипути, Унечи, Беседи. Почвы песчаные, сухие (3,0), умеренно-кислые (4,0), бедные минеральным азотом (2,8). МЭД (мкР/час) варьирует от 72-82 на почве и до 63-73 на высоте 1 м. Удельная активность ^{137}Cs в мохово-лишайниковом ярусе – 14230±1496 Бк/кг. Удельная активность цезия в плодовых телах грибов очень высокая и достигает 22950±2405 Бк/кг.

Связь ассоциации с единицами лесной типологии. Выделяя группу сосняков лишайниковых ***Pineta cladinosa***, В. Н. Сукачев (1938) указывал, что эта группа должна быть разделена на несколько типов леса. В лесной типологии описанная ассоциация соответствует типу леса ***Cladonio–Pinetum***, тип лесорастительных условий – A_1 – сухой бор.

Ассоциация ***Dicrano–Pinetum sylvestris*** Preising et Knapp ex Oberdorfer 1957 (syn. ***Festuco ovinae–Pinetum*** Bulokhov 1991) – Сосняк зеленомошник

Диагностические виды: *Pinus sylvestris* (доминант), *Vaccinium vitis-idaea* (доминант), *Dicranum polysetum, Melampyrum pratense, Ptilium crista-castrensis, Veronica officinalis* (табл.1 – 2).

Состав фитоценоза. Фитоценозы 4-х ярусные. Состав древостоя 10 С + Б или 9 С 1 Б, сомкнутость крон 0,5-0,7. Сосна II-III класса бонитета. Подлесок сформирован рябиной с участием крушины. В травяно-кустарничковом ярусе доминирует брусника (*Vaccinium vitis-idaea*) с участием черники (*V. myrtillus*) и ландыша майского (*Convallaria majalis*). Основу мохового яруса формируют *Pleurozium schreberi, Dicranum scoparium* и *D. polysetum.* Флористическая насыщенность достаточно высокая, на площадке в 400 м^2 можно обнаружить от 22 до 31 вида.

Характерные виды грибов: *Xerocomus subtomentosus* – моховик зеленый, *X. badius* – польский гриб, *Tylopillus felleus* – ложный боровик (желчный гриб), *Rozites caperata* – колпак кольчатый, *Russula integra* – сыроежка цельная, *R. cyanoxantha* – с. сине-желтая, *R. lutea* – с. золотисто-желтая, *R. lilacea* – с. лиловая, *R. rubra* – с. красная.

Установлено три варианта. Вариант ***Quercus robur*** отличают диагностические виды дуб черешчатый, ландыш майский, вейник тростниковидный (*Calamagrostis arundinacea*), орляк (*Pteridium aquilinum*). Присутствеие трех последних видов свидетельствуют о хорошей аэрации верхнего горизонта почвы. Дуб в этих условиях низкорослый, корявый, кустарниковой формы. Вариант соответствует типу лесорастительных условий A_2 – свежий бор.

Вариант ***Festuca ovina*** – овечьеовсяницевый. Сообщества варианта распространены как правило вблизи населенных пунктов и нередко представляют нарушенные сообщества.

Вариант ***Calluna vulgaris*** – сосняк вересковый. Занимает ровные, относительно пониженные участки с дерново-среднеподзолистыми, влажными, кислыми, бедными азотом песчаными почвами. Опознается по группе видов: вереск обыкновенный (*Calluna vulgaris*), белоус торчащий (*Nardus stricta*), фиалка собачья (*Viola canina*), калган (*Potentilla erecta*). В древостое доминирует сосна в среднем 35-летнего возраста, достигающая 14 м в высоту. Подлесок не развит. В травяно-кустарничковом ярусе фон создает вереск обыкновенный. На этом фоне рассеяны белоус, калган, сивец луговой (*Succisa pratensis*), горечавка легочная (*Pulmonaria pneumonanthe*). Моховой покров пятнистый. Тип лесорастительных условий – $B_{1\text{-}2}$. Для этого варианта характерны грибы: *Suillus luteus* – масленок поздний, *S. granulatum* – м. зернистый, *Amanita muscari* – мухомор красный, *Xerocomus badius* – польский гриб.

Экология. Сообщества ассоциации занимают возвышенные участки и склоны волнистых зандровых равнин на суховатых и свежих (3,0-4,6), кислых (2,3-3,0), бедных минеральным азотом (2,4-2,6) легкосупесчаные почвах. В этих эдафических условиях находится синэкологический оптимум *Vaccinium vitis-idaea,* которая часто доминирует в травяно-кустарничковом ярусе. Из-за обилия брусники и зеленых мхов эти леса называют сосняками брусничниками или бруснично-зеленомошными.

МЭД на почве в разных районах, варьирует от 22-24 до 107-139 мкР/час. Удельная активность ^{137}Cs в моховом ярусе от 7411±901 до 16290 Бк/кг. Более высокая удельная активность ^{137}Cs в плодовых телах различных видов грибов: сыроежка красная – 57772±620; волнушка розовая – 96860; сыроежка желтая – 9156±948; подберезовик обыкновенный – 5962±624.

Связь ассоциации с единицами лесной типологии. Ассоциация ***Dicrano–Pinetum*** широко распространена в юго-западных районах области. Вариант ***Quercus robur*** представлен доминантным типом леса ***Querco–Pinetum vacciniosum*** – сосняк *с* дубом брусничный или дубово-сосновая суборь. Вариант овечьеовсяницевый – ***Festuca ovina*** – соответствует типу леса ***Vacccinio–Pinetum convallariosum*** – сосняк бруснично-ландышевый.

Ассоциация ***Molinio caeruleae–Pinetum*** (E. Schmid. 1936) em. W. Matusz. 1973

Диагностические виды: *Molinia caerulea, Pinus sylvestris* (доминант), *Polytrichum communis* (табл. 1 – 3-5).

Состав фитоценоза. Древостой 1 яруса:10 С + Б, Ос. Сомкнутость крон 0,5-0,7. Бонитет II-III класса. Иногда имеется второй подъярус из дуба черешчатого высотой 8-9 м, сомкнутость крон 0,2-0,4. Обычно дуб за пределы второго подъяруса не выходит. Подлесок слабо развит. Его формирует крушина (*Frangula alnus*) с участием рябины (*Sorbus aucuparia*). В травяно-кустарничковом ярусе доминирует черника с участием брусники и молинии голубой (*Molinia caerulea*). Константны в травостое: *Calluna vulgaris, Trientalis europaea.* Моховой ярус всегда хорошо развит, в нем доминирует *Pleurozium schreberi* с участием *Dicranum polysetum* и *D. scoparium.* В западинах дернинками растут сфагновые мхи. Флористическая насыщенность варьирует от 11 до 22 видов 400 м^2.

В составе ассоциации установлено три варианта.

Вариант ***Rubus nessensis*** (табл. 1 – 4). Диагностические виды: *Rubus nessensis, Pteridium aquilinum, Potentilla erecta, Calamagrostis arundinacea, Carex nigra.* Сообщества занимают относительно пониженные участки с влажными (6,0-6,1), кислыми (2,3-2,6), бедными азотом (2,9-3,0) дерново-подзолистыми песчаными почвами. В составе древостоя появляется *Betula pubescens.* В травяно-кустарничковом ярусе доминирует *Vaccinium myrtillus.* Имеется хорошо развитый моховой ярус, в котором фон создает *Pleurozium schreberi,* в микрозападинах *Carex cinerea, C. nigra, Sphagnum fallax, S. girgensohnii.*

Вариант ***Ledum palustre*** (syn. ***Molinio–Pinetum ledetosum palustris*** Bulokhov 1991) (табл. 1 – 5). Диагностические виды варианта: *Ledum palustre, Betula pubescens. Salix cinerea, Sphagnum fallax, Sph. girgensohnii, Vaccinium uliginosum.* Вариант объединяет наиболее заболоченные сообщества ассоциации. Они занимают замкнутые низины и окраины сфагновых болот на влажных и сырых (7,0-0,8) торфянисто-подзолистых глеевых почвах. Микрорельеф бугристый. Состав первого подъяруса 1О С. Сомкнутость крон 0,5-0,6. Сосна в этих сообществах высокой жизненности, имеет в высоту 22-24 м и III класс бонитета. Второй подъярус разрежен и сформирован березой пушистой. В третьем подъярусе рассеянно встречается дуб черешчатый, высотой 3-6 м. Несмотря на присутствие видов переходных болот, включенных в состав диагностических видов, в травяно-кустарничковом ярусе этих лесов доминируют *Vaccinium myrtillus, Molinia caerulea,* а в моховом – *Pleurozium schreberi.* Сообщества данного варианта занимают промежуточное положение между ассоциацией ***Molinio caeruleae–Pinetum*** и ***Vaccinio uliginosi-Pinetum*** класса ***Vaccinietea uliginosi***. Они отличаются от последней как по жизненности сосны (бонитет III класса), так и по обилию черники с молинией голубой в травяно-кустарничковом ярусе.

Вариант ***typica*** (табл. 1 – 3). Диагностические виды варианта те же, что и у ассоциации. Сообщества варианта занимают ровные понижения со свежими или влажноватыми (5,1-5,5) почвами. Флористическая насыщенность невысокая – 11-17 видов на 400 м^2.

Характерные виды грибов: *Lactarius necator* – черный груздь, *Amanitopsis fulva* – поплавок желтый и *Amanitopsis vaginata* – *п.* серый, *Russula lutea* – сыроежка желтая, *R. paludosa* – болотная, *Paxillus involutus* – свинушка тонкая.

Экология. Сообщества ассоциации широко распространены по ровным, относительно пониженным участкам зандровых равнин, I-IV террасам рр. Ипуть, Беседь и их притоков. Эти сообщества встречаются в широком диапазоне влажности почвы. Занимают ровные пониженные участки с дерново-подзолистыми песчаными или супесчаными, свежими (5,1-5,5) или влажными и сыроватыми (6,0-7,5) торфянистыми, кислыми (2,1-3,8), бедными азотом (2,2-3,1) почвами. МЭД на почве – 101-111, на высоте 1 м – 73-103 мкР/час. Удельная активность Бк/кг ^{137}Cs: черника (побег) – 12585±201, листья – 5989±760; свинушка тонкая – 12840±0,4.

Связь с единицами лесной типологии. Ассоциация ***Molinio–Pinetum*** включает в себя сообщества сосняков-черничников, чернично-молиниевых. Сообщества ассоциации были описаны отечественными геоботаниками как доминантные типы леса ***Pinetum myrtillosum***, ***Pinetum molinietosum***, ***Piceo–Pinetum myrtillosum.*** Тип лесорастительных условий A_3 – влажный бор. Встречается вариант сосняка черничного – сосняк орляковый – ***Pteridium aquilinum*** var. – по приподнятым участкам со свежими, кислыми, бедными азотом почвами. Диагностические виды варианта: орляк, вейник тростниковидный, ежевика, лапчатка прямостоячая. Вариант ***Ledum palustre*** отнесен к типу ***Pinetum sphagno-myrtyllosim*** – сосняк сфагново-черничный или сырой бор – A_4. Производными типами являются березняки и осинники молиниевые и черничные.

Ассоциация ***Vaccinio uliginosi–Pinetum*** Kleist 1929 em. Mat. 1962
(syn. ***Ledo–Pinetum*** Tx. 1995, ***Eriophoro–Pinetum*** Bulokhov 1991]

Диагностические виды: *Pinus sylvestris* (доминант), *Eriophorum vaginatum, Vaccinium uliginosum* (табл. 1 – 6).

Состав фитоценоза. Древостой одноярусный. Состав 10 С или 5 С 5 Б. пуш. Сомкнутость крон 0,5-0,6. Средняя высота 12 м. Сосна в этой ассоциации IV-V класса бонитета.

В кустарниковом ярусе часто обилен *Ledum palustre.* Облик травяно-кустарничкового яруса определяет *Eriophorum vaginatum* иногда в сочетании с *Oxycoccus palustris.* В моховом покрове обильны сфагновые мхи: *Sphagnum fallax* (доминант) с участием *Sph. nemoreum* и *Polytrichum strictum.* Они формируют сплошной ковер. Наряду с растениями кустарничковых сфагновых болот в составе ценофлоры синтаксона с высоким классом постоянства присутствуют характерные виды влажных и сырых сосновых лесов: *Vaccinium myrtillus, V. vitis-idaea, Pleurozium schreberi, Dicranum polysetum.* Они локализуются по повышениям микрорельефа. Флористическая насыщенность невысокая, на площадке в 400 м^2 обычно произрастает 10-13 видов.

Ассоциация представлена двумя субассоциациями. Субассоциация ***V.u.–P. sphagnetosum fallacis***. Диагностический вид *Sphagnum fallax.* Характерной особенностью сообществ ассоциации является высокое постоянство и обилие *Sph. fallax.* В составе субассоциации выделено два варианта.

Вариант ***Oxycoccus palustris*** (табл. 1 – 6). Д. в. варианта: *Oxycoccus palustris.* Состав древостоя 9 С 1 Б. пуш. Сомкнутость крон 0,5-0,6. Сосна низкой жизненности. Средняя высота 12 м. Бонитет V класса. В составе древостоя постоянна береза пушистая, местами образующая второй подъярус. Облик травяно-кустарничкового яруса, как правило, определяет пушица влагалищная. Флористическая насыщенность 11 видов на 400 м^2. Сообщества варианта имеют важное значение как естественные плантации клюквы.

Вариант ***typica*** представляет типичные сообщества субассоциации и не имеет своих диагностических видов. В составе древостоя II подъяруса. Состав первого подъяруса 10 С или 9 С 1 Б. пуш. Средняя высота 14 м. Второй подъярус сформирован березой пушистой 10 Б. пуш. Сомкнутость крон 0,5-0,6. Сосна низкой жизненности. Бонитет IV -V класса. На фоне сплошного мохового ковра, сформированного *Sphagnum fallax* с участием *Sph. nemoreum* и

Sph. magellanicum, рассеяны кустарнички – *Vaccinium myrtillus, V. vitis-idaea.* На отдельных участках обильна *Molinia caerulea.*

Характерный вид гриба – подберезовик болотный.

Экология. Ассоциация объединяет субконтинентальные и континентальные сообщества сфагновых сосновых лесов на переходных болотах. Сообщества ассоциации занимают недренируемые низины с сырыми (7,0-8,5), сильнокислыми (2,0), бедными минеральным азотом (1,7-2,4) торфяными почвами. МЭД на почве – 65 мкР/час, на высоте 1 м – 63 мкР/час. Удельная активность, Бк/кг: *Ledum palustre* (листья) – 61370; *Oxycoccus palustris* – 12920; *Sphagnum* sp. – 18250; подберезовик болотный – 29470.

Связь с единицами лесной типологии. Ассоциация включает в себя различные доминантные типы леса. ***Pinetum ledo-sphagnosum***, ***Pinetum eriophoro-sphagnosum***, ***Pinetum sphagnosum***. Для них характерен тип лесорастительных условий A_5 – мокрый бор.

Ассоциация ***Veronico incanae–Pinetum*** Bulokhov et Solomeshch 2003 (syn. ***Peucedano–Pinetum veronicetosum incanae*** Bulokhov 1991 (art. 1)

Диагностические виды ассоциации: *Pinus sylvestris* (доминант), *Quercus robur, Veronica incana, Koeleria grandis, Geranium sanguineum, Fragaria vesca, Rubus saxatilis, Campanula persicifolia, Trommsdorfia maculata* (табл. 1 – 7, 8).

Состав фитоценоза. Фитоценозы четырехъярусные. Состав древостоя I подъяруса 10 С. Сосна I-II класса бонитета. Второй подъярус сформирован дубом. Состав 10 Д. Дуб имеет высоту от 6 до 16 м. Бонитет III-IV класса. Общая сомкнутость крон 0,6-0,7. Кустарниковый ярус слабо развит (сомкнутость 1-2 %). Его формируют *Chamaecytisus ruthenicus*, с участием *Genista tinctoria, Sorbus aucuparia*, изредка присутствуют торчки лещины и бересклета бородавчатого. Травяно-кустарничковый ярус флористически богат. Флористическое разнообразие 28-43 вида на 400 м^2.

Помимо диагностических видов класса ***Pulsatillo–Pinetea***, в нем встречаются ксеротермные виды широколиственных лесов порядка ***Quercetalia pubescenti-petraeae***, а также некоторые виды союза ***Dicrano–Pinion***. Таким образом, в ценофлоре синтаксона выделяется группа ксероморфных, термофильных видов: *Antennaria dioica, Calamagrostis epigejos, Chimaphilla umbellata, Chamaecytisus ruthenicus, Genista tinctoria, Festuca ovina, Geranium sanguineum, Koeleria grandis, Hieracium umbellatum, Pilosella officinarum, Pulsatilla patens, Peucedanum oreoselinum, Polygonatum odoratum, Trommsdorfia maculata, Veronica incana, Veronica spicata.* Все эти виды можно рассматривать как единую экологическую группу, выступающую индикатором сухих местообитаний. Краем ценоареала виды группы заходят в сообщества асс. ***Cladonio–Pinetum***. Моховой ярус, как правило, хорошо развит и сформирован *Pleurozium schreberi* с участием *Dicranum polysetum* и *D. scoparium.*

Разнообразие сообществ ассоциации представлено двумя вариантами.

Вариант ***Trifolium alpestre*** (табл.1 – 8) установлен по группе диагностических видов: *Trifolium alpestre, Melica nutans, Laserpitium pruthenicum, Stachys officinalis.* Вариант объединяет сообщества на более богатых и слабо кислых (4,6) почвах. В I подъярусе появляется дуб черешчатый. Сообщества варианта отличаются присутствием в составе травяно-кустарничкового яруса видов типичных для ксеротермных дубовых лесов. Помимо диагностических видов варианта это *Carex montana, Prunella grandiflora, Ranunculus polyanthemos, Serratula tinctoria* и др. Моховой ярус пятнистый. В отдельных сообществах мхи вообще отсутствуют. Флористическое разнообразие варьирует от 28 до 43 видов на 400 м^2.

Вариант ***typica*** представляет типичные сообщества и своих диагностических видов не имеет. Распространен на сухих (3,6), кислых (3,8), бедных азотом (2,6) песчаных почвах. Обычно это осветленные леса с сомкнутостью крон 0,4-0,5. Осветление способствует интенсивному разрастанию вейника наземного. В ряде случаев он выступает доминантом.

Экология. Сообщества ассоциации распространены в долине р. Ипути, за пределами ареала *Picea abies*, по возвышенным участкам на супесчаных, сухих кислых бедных минеральным азотом почвах, подстилаемых суглинками.

Связь с единицами лесной типологии. Ассоциация включает в себя типы леса: ***Querco–Pinetum herbosum*** **–** сосняк с дубом травяной, ***Querco–Pinetum convalleriosum*** **–** сосняк с дубом ландышевый. По типу лесорастительных условий ассоциацию следует отнести к типу C_1 – свежий сугрудок.

Ассоциация ***Vaccinio myrtilli–Quercetum*** Bulokhov et Solomeshch 2003
(syn. ***Vaccinio myrtilli–Quercetum*** Bulokhov 1991 (art. 1)

Диагностические виды: *Quercus robur* (доминант), *Pinus sylvestris* (доминант), *Vaccinium myrtillus, V. vitis-idaea, Peucedanum oreoselinum, Potentilla erecta, Laserpitium pruthenicum, Melampyrum nemorosum, Chamaecytisus ruthenicus, Festuca ovina. Hieracium umbellatum, H. vulgatum, Scorzonera humilis* (табл. 1 – 9).

Состав фитоценоза. Ассоциация объединяет ацидофитные дубово-сосновые, осветленные леса. Фитоценозы четырехъярусные. В древесном ярусе доминируют *Quercus robur* и *Pinus sylvestris.* Состав I подъяруса 10 С 1 Б + Д или 9 Д 1 С + Б. Бонитет сосны I класса. Состав II подъяруса: 10 Д, бонитет дуба II-III класса. Сомкнутость крон 0,5-0,7. Кустарниковый ярус формируют *Corylus avellana, Frangula alnus, Sorbus aucuparia* и *Euonymus verrucosa.* Сообщества этой ассоциации отличаются участием бореальных видов класса ***Vaccinio–Piceetea*** в составе травяно-кустарничкового яруса, вошедших в группу диагностических видов ассоциации, а также лесостепных видов субпонтического геоэлемента.

Разнообразие сообществ в составе ассоциации отражено выделением четырех вариантов и фации (Булохов, Соломещ, 2003).

Для обследованной территории характерен вариант ***Geranium sanguineum***. Диагностические виды: *Campanula rotundifolia, Geranium sanguineum, Koeleria grandis.* Сообщества варианта занимают возвышенные элементы рельефа с суховатыми (3,0-4,8) почвами. В древостое доминирует *Pinus sylvestris.* Второй подъярус формирует *Quercus robur,* имеющий высоту 14-16 м. Для этого варианта характерна фация ***Pineosum sylvestris***. В сообществах фации присутствуют и диагностические виды союза ***Dicrano–Pinion****: Antennaria dioica, Calluna vulgaris, Dicranum polysetum, Veronica officinalis.*

Экология. Сообщества распространены по приподнятым местообитаниям с дерново-подзолистыми кислыми и слабокислыми (2,7-5,7) сухими и свежими (3,5-5,1) бедными или умеренно обеспеченными минеральным азотом (3,0-4,6) почвами супесчаного мехсостава.

Связь с единицами лесной типологии. Ассоциация ***Vaccinio myrtilli–Quercetum*** включает в себя доминантные типы сосновых лесов: ***Querco–Pinetum corylosum*** – сосняк с дубом лещиновый, ***Querco–Pinetum vaccinio-herbosum*** – сосняк с дубом чернично-травяной. Все указанные типы леса по типу лесорастительных условий являются свежими судубравами C_1. Производные типы леса – березняк с осиной лещиновый, березняк с дубом горичниковый.

Широко распространен березняк тонкополевичный. Опознается по группе диагностических видов: *Agrostis tenuis* – полевица тонкая, *Sieglingia decumbens* – зиглингия лежачая, *Thymus ovatus* – чабрец яйцевидный, *Poa compressa* – мятлик сплюснутый, *Achillea millefolium* – тысячелистник обыкновенный. Занимает плато и верхние части крутых склонов с легкосупесчаными, свежими и сухими умеренно кислыми и слабо обеспеченными азотом почвами. Сообщества двухярусные. Состав I яруса 10 Б. Сомкнутость крон 0,7. Средняя высота 16 м. Подлесок не развит. В густом травяно-кустарничковом ярусе (общее проективное покрытие 80 %) фон создает полевица тонкая с зиглингией лежачей.

Характерные виды грибов: *Lacarius pubescens* – волнушка белая (белянка), *Boletus edulis f. betulicola* – белый гриб березовый, *Leccinium scabrum* – подберезовик обыкновенный.

Таким образом, сосновые леса радиационно загрязненных юго-западных районов представлены 6 ассоциациями. Из них наиболее широко распространены сообщества ассоциаций союза ***Dicrano–Pinion***. Сообщества синтаксонов описаны в различных зонах радиационного загрязнения от 40 до 49 ки/км^2. Мощность экспозиционной дозы варьирует в каждом типе сообществ. Отмечена высокая удельная активность ^{137}Cs в растениях травяно-кустарничкового и мохово-лишайникового ярусов. Наибольшая активность ^{137}Cs характерна для плодовых тел грибов.

Таблица 1 – Обзорная таблица ассоциаций сосновых лесов юго-западных районов Брянской области

Номера синтаксонов	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**12**
Количество описаний	**13**	**13**	**11**	**12**	**11**	**9**	**13**	**9**	**12**
Среднее число видов	**25**	**20**	**16**	**19**	**16**	**12**	**31**	**34**	**32**
Диагностические виды (д. в.) асс. ***Cladonio–Pinetum***									
Cladonia arbuscula	V*	I	.	I	.	.	.	.	.
C. furcata	V	.	.	.	.	.	.	.	.
C. tenuis	V	I	.	.	.	.	.	.	.
C. alpestris	IV	.	.	.	.	.	.	.	.
C. verticillata	III	.	.	.	.	.	.	.	.
C. baccillaris	III	.	.	.	.	.	.	.	.
C. degenerins	III	I	.	.	.	.	.	.	.
Cetraria islandica	III	.	.	.	.	.	.	.	.
Polytrichum piliferum	III	.	.	.	.	.	.	.	.
Cladonia gracilis	II	.	.	.	.	.	.	.	.
Д. в. субасс. ***Cladonio–Pinetum koelerietosum glaucae***									
Koeleria glauca	V	I	.	.	.	.	.	.	.
Pilosella officinarum	IV	.	.	.	.	.	II	II	.
*Astragalus arenarius**	III	.	.	.	.	.	.	.	.
Helichrysum arenarium	III	.	.	.	.	.	.	.	.
Dianthus borbasii	II	.	.	.	.	.	.	.	.
Д. в. субасс. ***Dicrano–Pinetum quercetosum roboris***									
Quercus robur II-III	III	V^2	III	IV	IV	.	.	.	.
Polygonatum odoratum	I	II	.	.	.	.	V	V	.
Potentilla erecta	.	.	.	IV	.	.	I	III	.
Succisa pratensis	.	.	.	III	.	.	I	I	.
Pulmonaria angustifolia	.	.	.	.	.	.	.	III	.
Viola riviniana	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Veronica chamaedrys	.	.	.	.	.	.	II	.	.
Д. в. асс. ***Molinio–Pinetum***									
Molinia caerulea	.	I	V^2	V	V^2		.	.	.
Polytrichum commune	.	.	III	V	V		.	.	.
Д. в. варианта ***Molinio–Pinetum Rubus nessensis*** var.									
Rubus nessensis	.	.	.	V	I		.	.	.
Carex nigra	.	.	.	III	II		.	.	.
Д. в. варианта ***Molinio–Pinetum Ledum palustre*** var.									
Ledum palustre	.	.	.	.	V	V	.	.	.
Betula pubescens I-II	.	.	.	III	V	IV	.	.	.
Sphagnum fallax	.	.	.	III	V	V^5	.	.	.
Sph. girgensohnii	.	I	.	I	V	.	.	.	.
Salix cinerea	.	.	.	.	III	.	.	.	.
Sphagnum magellanicum	.	.	.	.	II	IV	.	.	.
Vaccinium uliginosum	.	.	.	.	II	III	.	.	.
Д. в. асс. ***Vaccinio uliginosi–Pinetum***									
Eriophorum vaginatum	.	.	.	.	.	V^4	.	.	.
Oxycoccus palustris	.	.	.	.	.	V^2	.	.	.
Sphagnum nemoreum	.	.	.	.	.	IV	.	.	.

Номера синтаксонов	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**12**
Sph. magellanicum	.	.	.	.	.	IV	.	.	.
Polytrichum stictum	.	.	.	.	.	IV	.	.	.
Д. в. асс. ***Veronico incanae–Pinetum***									
Veronica incana	.	.	.	.	.	.	V	IV	.
Koeleria grandis	I	III	.	.	.	.	V	IV	.
Geranium sanguineum	.	I	.	.	.	.	IV	V	.
Rubus saxatilis	.	.	II	.	.	.	IV	IV	.
Trommsdorfia maculata	.	.	.	.	.	.	II	III	.
Д. в. асс. ***Veronico incanae–Pinetum Trifolium alpestre*** var.									
Trifolium alpestre	.	.	.	.	.	.	I	V	II
Melica nutans	.	I	.	.	.	.	+	V	.
Poa angustifolia	I	.	.	.	.	.	I	IV	.
Laserpitium pruthenicum	.	.	.	.	.	.	I	III	II
Д. в. асс. ***Vaccinio myrtilli–Quercetum*** и союза ***Vaccinio myrtilli–Quercion***									
Corylus avellana III	.	.	.	.	.	.	II	.	V^{5}
Stachys officinalis	.	.	.	.	.	.	.	.	IV
Potentilla alba	.	.	.	.	.	.	.	.	III
Brachypodium pinnatum	.	.	.	.	.	.	.	.	III
Clinopodium vulgaris	.	.	.	.	.	.	.	.	III
Scorzonera humilis	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Д. в. союза ***Cytiso–Pinion sylvestris*** и класса ***Pulsatillo–Pinetea***									
Chamaecytisus ruthenicus	V	IV	.	I	.	.	V	IV	II
Genista tinctoria	I	II	.	.	.	.	IV	II	.
Pulsatilla patens	II	.	.	.	.	.	V	IV	.
Peucedanum oreoselinum	I	II	.	.	.	.	V	V	.
Stachys officinalis	.	.	.	.	.	.	III	V	.
Carex ericetorum	V	I	.	.	.	.	II	II	.
Scorzonera humilis	I	.	.	.	.	.	I	III	.
Veronica spicata	I	.	.	.	.	.	I	II	.
Д. в. порядка ***Pinetalia sylvestris***									
Pinus sylvestris I	V^{5}	V^{5}	V^{5}	V^{4}	V^{4}	V^{5}	V^{5}	V^{5}	V^{4}
Dicranum polysetum	IV	V^{2}	V^{5}	II	III	.	IV	IV	.
Calluna vulgaris	II	III	IV	II	II	.	II	III	.
Melampyrum pratense	.	V	IV	II	I	.	IV	IV	.
Festuca ovina	V	**V**	.	.	.	.	V	V	.
Veronica officinalis	.	II	.	.	.	.	IV	IV	.
Antennaria dioica	II	III	.	.	.	.	II	III	.
Chimaphilla umbellata	.	II	.	.	.	.	II	.	.
Pyrola chlorantha	.	I	.	.	.	.	.	.	.
Monotropa hypopitys	.	I	.	.	.	.	.	.	.
Ptilium crista-castrensis	.	I	.	.	.	.	.	.	.
Д. в. класса ***Vaccinio–Piceetea***									
Picea abies II	.	I	II	.	.	.	.	.	.
Pleurozium schreberi	IV	V^{5}	V^{5}	V^{3}	V^{5}	V	V^{2}	V	.
Vaccinium vitis-idaea	II	V^{2}	IV^{2}	V	V^{1}	IV	V^{+}	V^{+}	IV
V. myrtillus	.	V^{+}	V^{2}	V^{4}	V^{3}	IV	V^{1}	V	V
Luzula pilosa	.	II	II	IV	I	.	IV	II	V
Dicranum scoparium	IV	V	V	II	I	II	.	.	.
Trientalis europaea	.	.	III	V	IV	.	I	II	II
Orthilia secunda	I	II	.	.	.	.	III	.	III

Номера синтаксонов	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**12**
Maianthemum bifolium	.	.	.	I	II	.	.	.	III
Dicranum polysetum	I	II	I	I	.	.	.	.	.
*Goodyera repens**	.	I	.	.	.	.	.	.	.
Lycopodium annotinum	.	.	.	II	I	.	.	.	.
Polytrichum juniperinum	II	II	.	.	.	.	.	.	.
Д. в. класса ***Querco–Fagetea***									
Quercus robur I	.	.	.	.	.	.	.	II	III
Quercus robur II	.	.	.	.	.	.	.	V^2	V
Euonymus verrucosa III	.	.	.	.	.	.	II	.	IV
Melica nutans	.	.	.	.	.	.	.	I	V
Festuca gigantea	.	.	.	.	.	.	.	.	IV
*Epipactis heleborine**	.	.	.	.	.	.	.	I	III
Pulmonaria obscura	.	.	.	.	.	.	.	.	III
*Lilium martagon**	.	.	.	.	.	.	.	.	III
Asarum euripaeum	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Dryopteris filix-mas	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Athyrium filix-femina	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Carex digitata	.	.	.	.	.	.	I	.	II
Paris quadrifolia	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Melampyrum nemorosum	.	I	.	I	.		.	.	II
Д. в. порядка ***Quercetalia pubescenti-petraeae***									
*Campanula persicifolia**	.	.	.	.	.	.	III	III	IV
Serratula tinctoria	.	.	.	.	.	.	.	II	III
*Carex montana**	.	.	.	.	.	.	I	III	II
*Digitalis grandiflora**	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Lathyrus niger	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Прочие виды									
Betula pendula I	.	IV	V	IV	.	.	II	II	IV
Populus tremula	.	.	.	II	.	.	.	I	
Frangula alnus III	.	V	IV	V	V	.	II	II	III
Sorbus aucuparia III	I	V	III	V	III	.	V	IV	IV
Convallaria majalis IV	II	V	.	.	.	.	V	V	V^2
Calamagrostis arundinacea		III	.	IV	I	.	IV	V	V
Solidago virgaurea	I	III	III	.	.	.	IV	IV	II
Hieracium umbellatum	I	I	.	.	.	.	IV	IV	
Fragaria vesca	.	III	.	.	.	.	IV	V	V
Rumex acetosella	I	II	.	.	.	.	.	.	.
Campanula rotundifolia	II	I	.	.	.	.	I	III	.
Agrostis tenuis	IV	II	.	.	.	.	.	.	.
Calamagrostis epigejos	III	IV	.	.	.	.	II	II	.
Hypericum perforatum	III	.	.	.	.	.	I	I	.
Thymus serpyllum	III	I	.	.	.	.	I	.	.
Dryopteris carthusiana	.	.	.	II	.	.	.	.	.
Pteridium aquilinum	.	.	.	V	II	.	I	.	III
Anthoxanthum odoratum	.	I	.	.	.	.	.	I	.
Artemisia campestris	II	.	.	.	.	.	.	.	.
Dianthus arenarius	I	II	.	.	.	.	.	.	.
Knautia arvensis	II	.	.	.	.	.	.	.	.
Stereocaulon paschale	II	.	.	.	.	.	.	.	.
Hylotelephium maximum	.	.	.	.	.	.	II	.	.

Номера синтаксонов	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**12**
Carex canescens	.	.	.	II	I	.	.	.	.
Calamagrostis canescens	.	.	.	II	+	.	.	.	.
Ranunculus polyanthemos	.	.	.	.	.	.	+	II	.
*Prunella grandiflora**	.	.	.	.	.	.	.	II	.
Steris viscaria	.	.	.	.	.	.	II	.	.
Geranium sylvaticum	.	.	.	.	.	.	.	.	II
Silene nutans	.	.	.	.	.	.	II	.	.
Corynephorus canescens	I	.	.	.	.	.	.	.	.
Pyrola rotundifolia	I	I	.	.	.	.	.	.	IV
Rubus saxatilis	.	.	.	.	.	.	.		V
Dryopteris carthusiana	.	.	.	.	.	.	.	I	II
Ranunculus auricomus	.	.	.	.	.	.	.	.	II

Виды встреченные в одном или в двух описаниях. *1. Poa angustifolia, Veronica chamaedrys, Poa compressa, Silene borysthenica, Equisetum hyemale, Lycopodium clavatum, Potentilla argentea, Rubus idaeus. 2. Avenella flexuosa, , Galium mollugo, Silene nutans, Rubus caesius, Lycopodium clavatum, Linnaea borealis*, Carex ericetorum , Lycopodium clavatum, Oxalis acetosella, Milium effusum, Juncus effusus. 3. Calamagrostis canescens, Rubus caesius, 7. Lycopodium clavatum, Diphasiastrum complanatum*, Hieracium umbellatum, Veronica spicata, Pulmonaria angustifolia, Ranunculus polyanthemos, Laserpitium pruthenicum, Nardus stricta. 8. Genista germanica*, Trifolium medium, Trifolium montanum, Deschampsia cespitosa, Dracocephalum ruyschiana*, Agrostis tenuis, Ajuga genevensis, Platanthera bifolia*, Steris vesicaria, Rubus caesius, Thymus serpyllum, Chimaphila umbellata. 9. Cervaria rivini, Actaea spicata, Primula veris, Pulmonaria angustifolia.*

Синтаксоны*: 1. Acc.* Cladonio–Pinetum koelerietosum glaucae***. 2. Acc.*** Dicrano–Pinetum quercerosum roboris***. 3-5 Acc.*** Molinio–Pinetum***, Варианты: 3.*** Rubus nessensis***; 4.*** Ledum palustre***; 5.*** typica***. 6. Acc.*** Vaccinio uliginosi–Pinetum***. 7-8. Acc.*** Veronico incanae–Pinetum**:** ***7. Вариант*** typica***; 8. Вариант*** Trifolium alpestre***. 9.*** Vaccinio myrtilli–Quercetum**.**

Класс постоянства указан по 5-балльной шкале [Braun-Blanquet, 1964]. Знаком * отмечены редкие виды растений в Брянской области.

Знаком * отмечены редкие и нуждающиеся в охране в Брянской области виды растений.

In the paper the results of complex radiologico-geobotanical researches in radioactive-contaminated southern-western part of the Bryansk region are done. 6 assoaciations assigned to 4 allianses, 4 orders, 4 classes are established with use of the Braun-Blanquet approach. The communities of syntaxon are distributed in the different zones of radioactive contamination (1-49 ku/km^2). The high ^{137}Cs-activity for fungies, plants of the herbal and moss-lichens layers is noted.

The key words: *Bryansk region, radioactive-contaminated regions, floristic classification, pine-forests.*

Список литературы

1.Булохов, А.Д. Эколого-флористическая классификация лесов Южного Нечерноземья России / А. Д. Булохов, А. И. Соломещ. Брянск, Изд-во БГУ, 2003. 359 с.

2.Воробьев, Д. В. Типы лесов европейской части СССР / Д.В. Воробьев. Киев: АН УССР, 1953. 452 с.

3.Игнатов, М.С. Список мхов территории бывшего СССР / Игнатов М.С., Афонина О.М. // Arctoa. – 1992. Т.1. № 1-2. С. 1-85.

4.Пастернак, А. К. Физико-географическое районирование Брянской области на основе ландшафтной карты для целей учета земель / Пастернак А. К. / Автореф. канд. дис. …к.г.н. Москва, 1967. 20с.

5.Определитель лишайников России . Спб. Вып. 6. 1996. 304 с.; 1998. Вып. 7. 166 с.

6.Семенищенков, Ю.А. Фитоценотическое разнообразие Судость-Деснянского междуречья / Ю.А. Семенищенков. Брянск, 2009. 400 с.

7.Черепанов, С.К. Сосудистые растения России и сопредельных государств / С.К. Черепанов. – СПб.: Мир и семья, 1995. – 992 с.

8.Braun-Blanquet, J. Pflanzensociologie / Braun-Blanquet J. 3. Aufl. Wien, N.-Y., 1964. 865 S.

9.Ellenberg, H. Zeigerwerte von Pflazen in Mitteleuropa / H. Ellenberg, H. E. Weber, R. Dull, V. Wirth, W.Werner, D. Paulssen // Scripta Geobotanica, XVIII. 1992. 2.Auflage. 258 P.

10.Westhoff, V. The Braun-Blanquet approach // Classification of plant communities / Westhoff, V., Van der Maarel E. / Ed. R.H. Whittaker. The Hague, 1978. P. 287-399.

Работа выполнена в рамках трехстороннего международного проекта фундаментальных исследований в приграничных областях «РФФИ–БРФФИ–ГФФИ–2009» при поддержке гранта РФФИ № 09-04-90354 РБУа.

Об авторах:

А. Д. Булохов – докт. проф. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, kafbot2002@mail.ru.

Ю. А. Семенищенков - канд., стар. преп. Брянского государственного университета, им. акдемика И.Г. Петровского, kafbot2002@mail.ru.

УДК 623.445.8. 713: 581:539.1.047

АНАЛИЗ АКТИВНОСТИ РАДИОНУКЛИДОВ В БИОГЕОЦЕОЗАХ ЮГО-ЗАПАДНЫХ РАЙОНОВ БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ

А.Д. Булохов, Е.В. Борздыко, Панасенко Н.Н., Н.А.Сковородникова

Проведен анализ многолетних данных по активности радионуклидов в основных компонентах лесных и луговых биогеоценозах радиационно загрязненных районах Брянской области. Показано, что наиболее высокая радиоактивность ^{137}Cs характерна для мохово-лишайникового яруса, в плодовых телах грибов и лекарственных растениях. Наиболее высокая активность радионуклидов отмечена в биогеоценозах на природно-территориальных комплексах сформированных мощными песками и супесями с подзолистыми и дерново-подзолистыми песчаными почвами.

Ключевые слова: *Брянская область, радионуклиды, биогеоценоз, удельная активность ^{137}Cs, коэффициент перехода, природно-территориальный комплекс.*

Несмотря на значительное снижение радиационного фона, за 23 года после аварии на Чернобыльской АЭС, на загрязненных территориях вследствие частичного распада радионуклидов и их миграции в глубокие слои почвы, аккумуляция их в различных компонентах лесных и луговых биогеоценозов продолжается. Анализ литературных данных свидетельствует о продолжающейся аккумуляции радионуклидов растениями и грибами и даже об увеличении их концентрации [1,3-6,8]. В наиболее загрязненных районах Брянской области вклад радионуклидов от потребления грибов и ягод в формировании дозы внутреннего облучения населения увеличился с 1987 по 1996 г с 5-10 до 40-45% [9]. В ряде юго-западных районах (Гордеевский, Злынковский, Климовский, Клинцовский, Красногорский, Новозыбковский) Брянской области находятся населенные пункты, в которых дозы облучения жителей превышают установленные законом «О радиационной безопасности населения» пределы облучения в 1 мЗв [1].

Остается невыясненным вопрос о том, как идет аккумуляция радионуклидов в различных компонентах лесных и луговых биогеоценозах.

Цель статьи - проанализировать многолетние данные об удельной активности радионуклидов в различных компонентах лесных биогеоценозов, сосредоточив внимание на концентрацию их в грибах и ягодах, являющихся продуктами питания населения и диких животных.

Исследование удельной активности радионуклидов в основных элементах различных типов биогеоценозов проводились на территории Гордеевского, Клинцовского, Красногорского и Новозыбковского и Злынковского районов в 1994-1995 годах, а затем в 2009г. на тех же пробных площадях и в тех же типах леса: сосняк лишайниковый, сосняк зеленомошник, сосняк черничный, сосняк орляковый, сосняк лещиновый, сосняк с дубом лещиновый, сосняк пушице-сфагновый, березняк травяной, ольс крапивный и др. Геоботаническое описание лесной растительности и установление типов биогеоценозов проведено по методике В.Н.Сукачева [6]. Описание травяных сообществ проведено на пробных площадках размером 100м^2. Были обследованы сообщества ассоциаций ***Glycerietum maximae*** – большеманниковая, ***Corynephoretum canescentis*** - булавоносцевая, ***Koelerio gaucae-Corynephoretum canescentis*** – Сизотонконогово - булавоносцевая, сизокелеревая.

Отбор образцов для радиометрического анализа проводился на пробных площадках в 400м^2. Для анализа отбирались следующие компоненты экосистемы (биогеоценоза): почва - 1 кг, взятый с горизонта на глубине 0-10см; мхи, включая отмершие части; лишайники, различные виды грибов; дикорастущие ягоды, лекарственные растения.

Экспозиционная доза МЭД (мкР/час) на пробных площадках определялась на поверхности почвы и на высоте 1м от поверхности почвы дозиметром РКСБ-104. Радиометрический анализ проб проводился на радиометре "Гамма Плюс". В табл. 1-3 приведены результаты анализа удельной активности ^{137}Cs по типам биогеоценозов, зонам загрязнения и ландшафтам.

Таблица 1. Удельная активность цезия-137 в основных компонентах лесных биогеоценозов при различных экспозиционных дозах в 1995 г.

№	Тип биогеоценоза	Вид пробы	Экспозиционная доза мк/Р час:		Удельная активность ^{137}Cs		Кн
			на почве	на высоте 1 м	Ки /кг	Бк/кг	
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	**Dicrano-Pinetum** вар. Festuca ovina. Betula pendula facia, в 2 км к В. от п. Мирный Гордеевский р-н.	Lactarius necator Груздь черный	128	80	$4{,}5\cdot10^{-7}$	16650	1,8
		Lactarius torminosus Волнушка розовая	128	96	$9{,}2\cdot10^{-7}$	34040	3,8
		Почва песчаная	128	80	$2{,}4\cdot10^{-7}$	8880	
		Волнушка розовая	72	54	$1{,}7\cdot10^{-7}$	6290	1,5
		Почва песчаная	71	48	$1{,}1\cdot10^{-7}$	4070	
2.	**Dicrano-Pinetum** вар. Festuca ovina . В 1,5 км от с. Ущерпье у развилки дорог Клинцы – Новозыбков.	Pleurozium schreberi	157	123	$2{,}3\cdot10^{-7}$	8510	2,3
		Dicranum polysetum	157	123	$3{,}2\ 10^{-7}$	11840	3,2
		Моховик зеленый	159	110	$2{,}5\ 10^{-6}$	92500	25
		Горькушка	159	129	$1{,}4\ 10^{-7}$	5180	1,4
		Почва песчаная	135	103	$1{,}2\ 10^{-7}$	4440	
		Pleurozium schreberi	143	103	$3{,}2\ 10^{-7}$	11840	2,7
		Почва песчаная	149	96	$1{,}1\ 10^{-7}$	4070	
3.	**Molinio-Pinetum** - Сосняк черничник в 3 км от с. Ущерпье в сторону Клинцов	Vaccinium myrtillus	123	94	$9{,}7\cdot10^{-9}$	359	0,15
		Vaccinium myrtillus	123	94	$2{,}0\cdot10^{-8}$	740	0,31
		Почва песчаная	125	86	$5{,}9\cdot10^{-8}$	2183	
4.	**Agrostio-Betuletum** - березняк тонкополевичный (на плато)	Подберезовик обыкн.	150	120	$8{,}8\cdot10^{-8}$	3256	7,3
		Сыроежка красная	132	92	$5{,}5\cdot10^{-8}$	2035	4,6
		Почва супесчаная	131	92	$1{,}2\cdot10^{-8}$	444	
		Волнушка белая	150	120	$8{,}8\cdot10^{-8}$	3256	7,3

	с. Писаревка	Волнушка белая	172	130	$6{,}2\cdot10^{-7}$	22940	2,9
5.	**Dicrano-Pinetum** - сосняк овечьеовсяницевый I -я терраса реки Ипуть	Pleurozium schreberi	65	45	$5{,}6\ 10^{-7}$	20720	6,9
		Рогатик желтый	65	45	$5{,}8\ 10^{-8}$	1036	0,34
		Рогатик желтый	65	45	$6{,}2\ 10^{-8}$	2294	0,76
		Моховик зеленый	65	50	$9{,}3\cdot10^{-7}$	34410	11,5
		Пестрый зонтик	65	50	$3{,}5\ 10^{-8}$	2960	0,99
		Почва песчаная	65	45	$1{,}1\cdot10^{-8}$	4070	
Продолжение таблицы 1							
6	**Cladonio- Pinetum** - сосняк лишайнико-мшистый п. Ипуть Клинцовский р-н	Dicranum polysetum	91	65	4.2 10-7	15540	8,0
		Pleurozium schreberi	91	65	4.7 10-7	17390	9,0
		Cladonia sp.	91	65	8.6 10-7	31820	16,5
		Моховик зеленый	91	65	1,8 10-6	66600	34,6
7.	**Dicrano-Pinetum** – сосняк верещатниковый вариант, в 3 км к З. от с. Полона. Гордеевский р-н.	Potentilla erecta корневище	113	78	$1{,}5\cdot10^{-7}$	5550	2,2
		Calluna vulgaris (побег)	113	78	$2{,}4\cdot10^{-7}$	8880	3,6
		груздь+ свинушка тонкая	113	85	$1{,}8\cdot10^{-7}$	6660	2,7
		Моховик зеленый	74	59	$3{,}5\cdot10^{-7}$	12950	12,9
		Почва песчаная	96	92	$6{,}7\cdot10^{-8}$	2479	
8.	**Dicrano-Pinetum** - сосняк брусничник на дюне, у санатория Затишье, Клинцовский р-н.	Vaccinium vitis-idaea	22	18	$2{,}9\cdot10^{-8}$	1073	2,6
		Vacc. vtis-idaea	21	20	$2{,}2\cdot10^{-8}$	814	2,1
		Почва песчаная	22	18	$1{,}1\cdot10^{-8}$	407	
9.	**Molinio-Pinetum** - Березняк с осиной черничный (молиниевый) в 2 км к Ю. от с. Крыловка, Красногорский р-н.	Vaccinium myrtillus	65	63	$9{,}2\cdot10^{-8}$	3404	1,0
		Vac. myrtillus	65	63	$8{,}8\cdot10^{-7}$	32560	10
		Vac. myrtillus ягода	65	63	$3{,}3\cdot10^{-8}$	1221	0,34
		Груздь черный	65	63	$4{,}7\cdot10^{-8}$	1739	0,53
		Cantharellus cibarius Лисичка обыкнов.	65	63	$5{,}7\cdot10^{-8}$	2109	0,64
10.	**Shpagno-Pinetum** – сосняк пушице-сфагновый, 3,5км по трассе Ущерпье – Клинцы.	Ledum palustre	67	44	$4{,}4\cdot10^{-7}$	16280	12,7
		Ledum palustre	67	44	$3{,}2\cdot10^{-7}$	11840	9,3
		Oxycoccus palustris плоды	67	52	$2{,}0\cdot10^{-7}$	7400	5,8
		Oxycoc. palustris плоды	67	44	$1{,}7\cdot10^{-7}$	6290	4,9
		Sphagnum	67	44	$4{,}1\cdot10^{-7}$	15170	11,8
		Подберезовик болотный	66	53	$1{,}8\cdot10^{-6}$	66600	52,1
		Почва торфяная	67	53	$4{,}0\cdot10^{-8}$	1480	

Повторное обследование этих же биогеоценозов было проведено в 2009 году (табл.2).

Таблица 2 Удельная активность цезия -137 в основных компонентах биогеоценозов при различных экспозиционных дозах в 2009 г.

№	Тип биогеоценоза	Вид пробы	Экспозиционная доза мк/Р час		Удельная активность ^{137}Cs Бк/кг
			На почве	на высоте 1м	
1	**Glycerietum maximae** Близь п. Ущерпье, пойма реки Ипуть	Glyceria maxima Манник большой	38- 35	32-34	139,5±37,1
		Bidens tripartita Череда трехраздельная			218±56.6
		Продолжение таблицы 2			
2	**Corynephoretum canescentis**	Булавоносец седой	32-43	20-31	889±146
3.	**Koelerio glaucae-Corynephoretum canescenstis** Пос. Мирный, Гордеевский р-н.	Булавоносец седой Corynephorus canescens	47-64	32-54	1200±193
		Тонконог сизый			1548±213
		Цмин песчаный			817±146
		Грыжник голый			712±145
		Икотник серый			722±127
		Очиток едкий			243,3±47,8
4.	**Pinetum vacciniosum** Близь п. Любино трассы Злынка - Гомель	Брусника	107-139	74-101	2610±338
		Плаун булавовидный			27460±0,4
		Зимолюбка зонтичная			15820±0,4
5.	**Dicrano-Pinetum** вар. Festuca ovina . В 1,5 км от с. Ущерпье у развилки дорог Клинцы – Новозыбков, у пос. Веприн.	Lactarius deliciosus - Рыжик	90-120	62-90	11450
		Моховик желто-бурый			12060
		Lactarius rufa - Горькушка			86650
		Моховик зеленый			48400
		Сыроежка красная			9392±996
		Плаун булавовидный			12140
		Цмин, цветы			296±165
		Цмин песчаный			90,3±64,2
		Pleurozium schreberi			14890
		Dicranum polysetum			6311±845
		Ptilium crista castrensis			7040±910-
6	**ольс крапивный**	Крапива двудомная	25-36	19-32	1407±212
7	**Сосняк брусничный** Вдоль трассы на пос. Барки	Ландыш майский Convallaria majalis	67-98	60-81	3894±514
8	**Querco-Pinetum corylosum** Близь пос. Барки	Купена лекарственная	97-103	60-81	1256±177
		Корневище купены			2010±311
9	**Dicrano-Pinetum** Cladonia mitis var. - сосняк лишайниково- мшистый . Пос. Мирный, Гордеевский р-н.	Lactarius deliciosus - Рыжик	72-82	63-73	1627±957
		Масленок			22950±2405
		Сыроежка желтая			10240±1091
		Dicrnum+Pleurozium			14230±1496

10.	**Dicrano-Pinetum** вар. Festuca ovina. Betula pendula facia - березняк с сосной зеленомошный в 2 км к В. от пос. Мирный, Гордеевский р-н.	Paxillus involutus - Свинушка тонкая	69-76	54-62	7601±806
		Сыроежка едкая			3603±407
		Волнушка розовая			6048±638
		Подберезовик			15030
		Волнушка розовая			6048±638
		Черный груздь			6294±734
11.	**Peucedano-Pinetum** - сосняк ландышево-зеленомошный Пос. Затишье, Клинцовский р-н.	Lactrius rufa - Горькушка	22-29	11-12	6263±657
		Сыроежка серая			4082±431
		Ландыш майский			1156±262
		Pleurozium schreberi			1467±217
		Dicranum polysetum			3838±522

Продолжение таблицы 2

12.	**Пижмовое сообщество**	Пижма обыкновенная	30-38	21-33	35,2±32,4
13.	**Сосняк зеленомошник**	Ландыш майский	11-29	12	1156±268
14.	Сообщество **Сосна лесная - чистотел большой** Трасса Злынка-Гомель 95 кв.	Чистотел большой (побег)	78-112	71-87	$4{,}698 \cdot 10^4$
15.	**Agrostio-Betuletum** - Березняк тонко-полевичный Пос. Писаревка-Петрова Буда	Подберезовик обыкновенный	31-38	25-29	498,3±65,6
		Волнушка белая			100,7±15,9
		Белый гриб			11143±140
16.	**Dicrano-Pinetum-** сосняк мшистый, вариант овечьеовсяницевый. Пос. Любин хутор, Злынковский р-н.	Russula rubra - Сыроежка красная	107-139	74-101	16440
		Dicranum polysetum			13720
		Крушина ягоды			657,6±88,7
		Тонконог сизый			144,9±447
		Очиток едкий			520±37,9
17.	**Dicrano-Pinetum Koeleria glauca** var. **Betula pendula** facia - березняк с сосной мшистый. Пос. Перевоз, Новозыбковский р-н.	Сыроежка желтая	112-134	81-99	9156±948
		Сыроежка красная			57772±620
		Волнушка розовая			96860
		Подберезовик			5962±624
		Cladonia sylvatica			2738±477
		Dicranum polysetum			16290
		Pleurozium schreberi			7411±901
18	**Shagno-Pinetum** – сосняк пушице-сфагновый, в 3,5км от Ущерпья по трассе Ущерпье – Клинцы.	Ledum palustre листья	62-69	49-57	61370
		Oxycoccus palustris плоды			11840
		Oxyc. palustris литья			12920
		Подбел многолистный			27750
		Sphagnum sp.			18250
		Подберезовик болотный			29470
		Горькушка			48400

Анализ табл. 1-2 позволяет сделать некоторые выводы. Несколько снизилась МЭД с 1995 года за счет полураспада и миграции радионуклидов вглубь почвы. Тем не менее, в мохово-лишайниковом ярусе, в плодовых телах грибов и лекарственных растениях удельная активность цезия-137 остается высокой и, иногда, в несколько раз превышает допустимый уровень СанПиН 2.3.2.1807-01. Редким исключением являются суккуленты – очиток едкий и псаммофит – тонконог сизый.

В табл.3 приведены результаты анализа удельной активности цезия -137 по зонам загрязнения и ландшафтам. На обследованных районах выделяют 4 зоны радиационного загрязнения: 1-5 Ku/км^2; 5-15 Ku/км^2; 5-15 Ku/км^2; более 40 Ku/км^2. Первые две зоны загрязнения встречаются и не только в юго-восточных районах области. Пятна радиационного загрязнения отмечены в Дятьковском, Рогнеденском, Трубчевском, Карачевском районах.

Таблица 3. Удельная активность грибов ^{137}Cs в грибах и ягодах по зонам загрязнения и ландшафтам

Плотность загрязнения по зонам и типам ландшафтов		1-5 Ku/км^2	5-15 Ku/км^2	15-40Ku/км^2	Более 40 Ku/км^2
Тип ландшафта	Проба	Число проб*/ Удельная активность ^{137}Cs: Бк/кг			
39,58,79*	Boletus edulus	**26** */ 925 ± 185	**44** / 2220 ± 481	**60** / 5920 ± 1110	**85**// 82510 ± 25260
38, 59	Подберезовик обыкновенный	**17** / 1110 ±	**31** / 2220 ± 370	**36**/ 5550 ± 1480	**20** / 66600
	Моховик зеленый – Xerocomus subtomentosus	**12**// 11470±	-	**8**/ 51800±370	**10**/ 51800± 740
	Масленок поздний – Suillus luteus	**33**/ 740 ± 148	**40**/ 4070 ± 1110	**56** / 5180 ± 1480	**17**/ 46990± 12210
59,58	Масленок обыкновенный	**4** / 1850		**4**/ 4837	
	Черный груздь Lactarius necator	**17**/ 370 ± 74	**25**/ 2220 ± 370	**12** / 9054±1230	**19**/ 25530 ± 6660
	Опенок настоящий – Armillariella mellea	**11**/ 259 ± 148	**34**/ 1480 ± 370	**46** / 5550 ± 370	-
	Lactarius rufa- Горькушка	**18**/ 74 0± 220	**50**/ 2690 ± 740	**60**/ 5920± 740	**36**/ 180190±555
	Лисичка настоящая – Cantharellus cibarius	**20**/ 925 ± 296	**60**/ 2030 ± 370	**80** / 5920 ± 1480	**27**/ 3959 0±10360
58.59	Cantharellus cibarius	**3** / 296 ±57	-	**7**/ 8036	-
	Tricholoma portentosum Радовка серая	**3**/ 555	-	**3**/ 15589	-
58	Tricholoma flavovirens Зеленушка	-	-	**5** / 13408	-
58,39,79	Черника - Vaccinium myrtillus	**54**/ 580 ± 148	**200**/ 2220 ± 370	**170** / 4810 ± 1480	**60**/ 7770 ±2220
	Vaccinium myrtillus	**16**/ 763±	**24** //5145±	**6** 5206	-
	Брусника - Vaccinium vitis-idaea	**5**/ 2220 ±	**7**/ 3700 ± 1110	**10**/ 5550 ± 1110	-
38	Клюква болотная Oxycoccus palustris	**5**/ 17760 ± 1111	**4**/ 22090 ± 3700	-	-
	Земляника лесная Fragaria vesca	**24**/ 185± 111	**113**/ 370± 85,1	**30**/ 740± 222	**44**/ 2590± 740

59	Земляника лесная	**3**/ 926	-	-	-
	Клина - Viburnum opulus	-	**18**/ 1110± 220	-	-
59	Ежевика- Rubus caesius	**4**/ 370± 74	**6**/ 777± 259	-	-

Примечание: * - цифры показывают название и тип ландшафта. Ландшафты морено-зандровых равнин: 38 – Клинцовский, 39 - Новозыбковский, 58 – Злынковский; Ландшафты речных долин: 78 – Среднеипутский, 79 - Ниженеипутский.

Территории радиационно загрязненных районов находятся в пределах ландшафтов морено-зандровых равнин. Это ландшафты - Клинцовский, Новозыбковский, Злынковский и ландшафты речных долин: Среднеипутский, Ниженеипутский (Пастернак,1967). Наиболее широко распространен природно-территориальный комплекс (ПТК), сформированный мощными песками и супесями, с подзолистыми и дерново-подзолистыми почвами, преимущественно под сосновыми лесами. Значительные площади заняты террасами речных долин. Это – волнистые поверхности первых-четвертых террас, так же сложенные мощными песками и супесями с подзолистыми и дерново-подзолистыми почвами, тоже под сосновыми и возникающими на их месте березовыми и осиновыми лесами.

В этом ПТК наблюдается высокая удельная активность радионуклидов. Они активно поглощаются живыми компонентами биогеоценозов. Вероятно, это связано с особенностями коллоидных частиц песчаных почв, которые обладают способностью удерживать радионуклиды в гумусовом, корнеобитаемом слое почвы.

The analysis of the many-years ^{137}Cs-activity data in forest and meadow biogeocenoses of radioactive contaminated part of Bryansk region is done. It is shown that the high radioactivity of the ^{137}Cs is characterized for grasses of herbal layer, mosses and lichens and medicinal plants. The high ^{137}Cs-activity in biogeocenoses on natural-territorial complexes with deep sands and loam with sandy soils is noted.

The кey words: *Bryansk region, radionucleides, biogeocenosis, ^{137}Cs-activity, coefficient of migration, natural-territorial complex.*

Работа выполнена в рамках трехстороннего международного проекта фундаментальных исследований в приграничных областях «РФФИ–БРФФИ–ГФФИ–2009» при поддержке гранта РФФИ № 09-04-90354 РБУа.

Список литературы

1. Борздыко Е.В. Аккумуляция ^{137}Cs лекарственными растениями, произрастающими в условиях с разной плотностью загрязнения // Мат-лы науч-практ. конфер. «Актуальные проблемы науки и образования». Брянск - Новозыбков 26 апреля 2009 г.

2. Гигиенические требования к безопасности и пищевой ценности пищевых продуктов. Санитарно-эпидемиологичские правила и нормы СнаПиН 2.3.2. 1078-01. М.: Минздрав РФ, 2002. 164с.

3. Орлов А.А., Ирклиенко С.П., Краснов В.П.и др. Закономерности накопления Cs дикорастущими грибами и ягодами в Полесье Украины // Гигиена населенных мест. Киев, 2000. вып. 36. Ч.1. С. 431-445.

4. Попов А.В., Фесенко С.В., Алексахин Р.М., Пастернак А.Д., Прудников П.В. Радиологическая ситуация в сельскохозяйственной сфере на загрязненных территориях России в отдаленный период после аварии на Чернобыльской АЭС // Радиационная биология и радиоэкология , 2007. Т.47, №4. С. 423-434.

5. Сапегин Л.М., Дейнеко Н.М., Тимофеев С.Ф. Состояние растительности в зоне отчуждения 20 лет спустя после аварии Н ЧАЭС // Радиационная биология и радиоэкология , 2008. Т.48, №1. С. 67-75.

6. Сукачева В.Н. Методические указания к изучению типов леса. М.: 1957. 114.с

7. Спиридонов С.И., Алексахин Р.М., Фесенко С.В., Санжарова Н.И. Чернобыль и окружающая среда // Радиационная биология и радиоэкология , 2007. Т.47, №2. С. 196-203.

8. Федеральный закон «О радиационной безопасности населения» от 09. 01.1996, №3 Ф-3.11//Собрание законодательства РФ,1996. № 11 . С. 1362.

9. Fesenko S.V., Vogit G., Spiridonov S.I. et al. // Radiat Enverion. Biophs. 2000. V.39. P.291-300.

Об авторах

А. Д.Булохов -док. проф. Брянского государственного университета им. акдемика И.Г. Петровского, kafbot2002@mail.ru.

Е. В. Борздыко - канд. стар. препод. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, kafbot2002@mail.ru

Н. Н. Панасенко - канд. стар. препо. Брянского государственного университета им академика И.Г. Петровского, kafbot2002@mail.ru.

Н. А. Сковородникова- канд. стар. преп. Брянского государственного университета им. академика И.Г. , kafbot2002@mail.ru

УДК 575.113.2+575.17:577.213/217:636.2

АНАЛИЗ ПОЛИМОРФИЗМА ГЕНОВ КАППА-КАЗЕИНА, В-ЛАКТОГЛОБУЛИНА, ПРОЛАКТИНА, ГЕН РИЛИЗИНГ-ФАКТОРА И СОМАТОТРОПИНА ПО ALUI И MSPI МАРКЕРАМ У КОРОВ АЙРШИРСКОЙ ПОРОДЫ.

Е.В. Дроздов, В.В. Заякин, И.Я. Нам

Исследована генетическая структура стада коров айрширской породы СПХ «Сельцо» на территории Брянской области по генам каппа-казеина, пролактина, соматотропина, бета-лактоглобулина, гипоталамического фактора транскрипции, связанных с молочной продуктивностью. Отмечен высокий уровень гомозиготизации и отсутствие селекционно-ценных вариантов некоторых генов.

Ключевые слова: *Аиширская порода, каппа-казеин, пролактин, соматотропин, бета-лактоглобулин, гипоталамический фактор транскрипции, ПЦР-ПДРФ*

Начиная с середины 60-х годов XX века в популяционных и эволюционных исследованиях, а также в селекции всё шире стали использовать данные о биохимическом полиморфизме белков. Позже прогресс в биотехнологии и молекулярной генетике позволил привлекать сведения об изменчивости непосредственно молекул ДНК. Это позволило выявить наличие разнообразных аллельных вариантов, т.е. полиморфизм генов и генотипов искусственных и природных популяций, - необходимое условие успешной селекции.

Развитие животноводства на современном этапе невозможно без внедрения методов оценки признаков продуктивности сельскохозяйственных животных, базирующихся непосредственно на анализе наследственной информации. Большинство хозяйственно-полезных признаков сельскохозяйственных животных относятся к полигенным признакам.[1]

Наиболее полно в молекулярно-генетическом аспекте изучен крупный рогатый скот. Большинство известных на сегодня маркеров продуктивности выявлено именно у КРС. Большинство этих маркеров связаны с показателями молочной продуктивности. Этот количественный признак детерминируется большим числом генов, с разным индивидуальным участием. Эти гены функционально связанные в блоки локусов количественных признаков(QTL). Различное сочетание аллельных вариантов этих генов будут по-разному определять характеристики молочной продуктивности КРС. Для объективной оценки количественных признаков следует учитывать полиморфный вклад многих генов QTL.

Основными белковыми компонентами молока являются казеины – 2,6%, бета-лактоглобулин – 0,3%. В инициации и поддержании лактации принимают участие гормоны пролактин и соматотропин . Интенсивность их экспрессии находится под контролем клеток гипоталамической области, выделяющих стимулирующий рилизинг фактор - PIT-1. Активное участие этих генов в формировании признака молочной продуктивности служит основанием для поиска значимых ассоциации их полиморфных вариантов.

Целью данной работы является оценка генофонда по полиморфным вариантам генов каппа-казеина (CSN3), β-лактоглобулина (BLG), пролактина (PRL), гена рилизинг-фактора (PIT-1) и соматотропина (GH) в стаде коров айрширской породы СПХ Сельцо.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Исследования проводились на образцах ДНК, полученных из крови коров айрширской породы(n=50) СПХ Сельцо. В качестве антикоагулянта использовали ЭДТА (0,5М).

Из образцов крови выделяли ДНК стандартным методом[ ] с перерасчётом объемов растворов на 500мкл цельной крови.

У каждой коровы определяли полиморфизм локусов влияющих на молочную продуктивность: каппа-казеина, β-лактоглобулина(BLG), пролактина(PRL), гена рилизинг-фактора(PIT-1) и соматотропина(GH) по AluI и MspI маркерам.

Для всех локусов при изучении полиморфизма ДНК был использован метод полимеразой цепной реакции с последующим рестрикционным анализом продуктов амплификации (ПЦР-ПДРФ).

Табл. 1. Последовательность праймеров и температура отжига

Маркер	Последовательность праймера, 5’-3’	Температура отжига, °С	Методика
CSN3	TAT-CAT-TTA-TGG-CCA-TTG-GAC-CA CTT-CTT-TGA-TGT-CTC-CTT-AGA-GTT	56	Сулимова, 1991 [2]
BLG	CTA-TTG-TCC-TCG-TAGAGG-AAG-C A-AGA-AAG-CCC-TGG-ATA-AGC-AGC-C	62	Гладырь, 2001[3]
PRL	CGA-GTC-CTT-ATG-AGC-TTG-ATT-CTT GCC-TTC-CAG-AAG-TCG-TTT-GTT-TTC	59	Mitra A., 1995[4]
GH\MspI	CCC-ACG-GGC-AAG-AAT-GAG-GC TGA-GGA-ACT-GCA-GGG-GCC-CA	62	Mitra A., 1995[4]
GH\AluI	GCT-GCT-CCT-GAG-GGC-CCT-TCG GCG-GCG-GCA-CTT-CAT-GAC-CCT	59	Schlee, 1994[5]
PIT-1	CAA-TGAGAAAGTTGGTGC TCT-GCATTCGAGATGCTC	54	Moody, 1995[6]

Типирование аллелей генов проводили в соответствии с оригинальными методиками авторами, указанных в таблице 1.

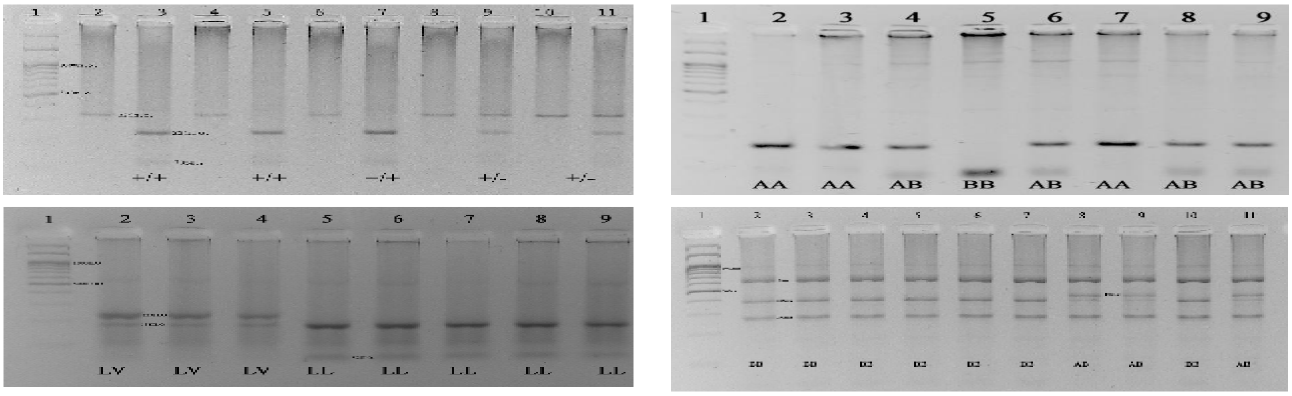
Реакцию проводили в амплификаторе «Терцик» фирмы «ДНК-технология». ДНК денатурировали при 94°С в течение 4 минут, а затем проводили 35 циклов амплификации в следующем режиме: 94°С – 1мин., отжиг праймеров – 1мин., 72°С – 1мин. Конечный этап синтеза проводили при 72°С в течение 4 мин. Температуры отжига праймеров указаны в таблице 1.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Нами были определены генотипы по анализированным генам 50 коров айрширской породы СПХ Сельцо.

Анализ полиморфизма анализируемых генов показан на рисунке1.

На рисунке 1 показан пример электрофоретического анализа полиморфизма анализируемых генов.



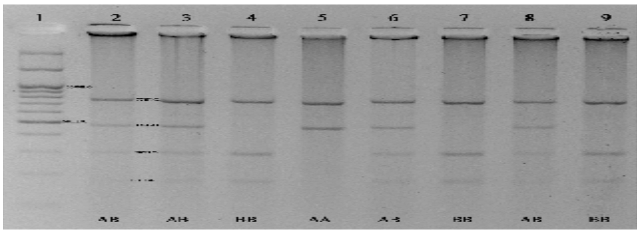


Рис.1. Электрофоретический анализ продуктов рестрикции фрагментов исследуемых генов: а – GH по MspI- маркеру, б – PRL по RsaI-маркеру, в – GH по Alu-маркеру, г – PIT-1 по сайту рестрикции эндонуклеазы HihfI, д – BLG по PvuII-

В таблице 2 представлены частоты генотипов анализированных генов.

В группе коров аиршириской породы ожидаемая гетерозиготность (Hex) по анализируемым генетическим маркерам в разной степени превышает значение наблюдаемой(Hobs). Исключением является маркер GH\MspI. По этому маркеру наблюдается небольшое превышение Hobs над Hex. Гомозиготизация по всем анализируемым локусам происходит неравномерно, преимущественно по одному аллелю, что вероятно может привести исчезновению второго аллеля. Так, при анализе полиморфизма гена пролактина аллель B присутсвовал только гетерозиготах (AB - 0.125, BB – 0), а B-вариант гена каппа-казеина не обнаружен. В литературных источниках имаются сообщения о резком снижении частоты B-аллеля гена каппа-казеина, а в ряде случаев полному его отсутствию у других пород КРС. [3,7,8]. При анализе частот генотипов анализируемых генов в группе айршиского скота, отмечается соответствие с результатами других исследователей. Так в работах [9, 10] приводятся приближенные к нашим значения частота генотипа BB пролактина в стадах чёрно-пёстрой немецкой и красно-пёстрой. В некоторых работах отмечается полное отсутствие (-/-) генотипа гена гормона роста и низкая частота VV-генотипа по AluI-маркеру. [9, 11, 12,]. Преобладание генотипа BB локуса PIT-1 отмечается в работе [13], аллель B этого гена широко представлен в группах коров чёрно-пестрой породы в хозяйствах Польши.[14]. Почти одинаковая встречаемость аллелей гена бета-лактоглобулина отмечается в работах [15, 16] Результаты наших исследований также показывают тенденцию по снижению полиморфизма и исчезновению некоторых вариантов анализируемых генов.

Табл.2. Генетическая структура популяции коров айрширской породы СПХ Сельцо по анализируемым генам.

CSN3		BLG		PRL		GH\MspI		GH\AluI		PIT-1	
AA	1	AA	0.062	AA	0.875	+/+	0.68	LL	0.553	AA	0.113
AB	-	AB	0.312	AB	0.125	+/-	0.297	LV	0.361	AB	0.227
BB	-	BB	0.625	BB	-	-/-	0.02	VV	0.085	BB	0.659
Hobs			0.312		0.0816		0.298		0.362		0.227
Hex			0.348		0.115		0.282		0.390		0.351

Среди выявленных сочетаний аллелей анализируемых генов, найдено наиболее часто встречая комбинация- CSN3 - AA, PRL - AA, BLG - BB, GH\MspI - +/-, GH\AluI - LL, PIT-1-BB. Все остальные сочетания встречались реже, некоторые были единичны.

There was investigated the genetic structure of the of Aurshire breed cows herd at Bryansk region. to the of genes quantitative attributes connected with milk productivity. There was appear that of selective valuable allele variants for κ-casein, prolactin, growth-gormone, PIT-1 has low content in investigated herd.

The key word : *Aurshire breed, κ-casein, prolactin, growth-gormone, β-lactoglobulin, pituitary transcription factor 1 (PIT-1)*

Список литературы

1. Зиновьева Н.А. Проблемы биотехнологии и селекции сельскохозяйственных животных. Дубровицы, ВИЖ, 2006, 342с.
2. Сулимова Г.Е., Шайхаев Г.О. Берберов Э.М. и др Генотипирование локуса каппа-казеина у крупного рогатого скота с помощью полимеразной цепной реакции // Генетика. 1991. Т.27. №12. С. 2053-2062
3. Гладырь Е.А. ДНК-диагностиеа вариантов генов каппа-казеина и беталактоглобулина у крупного рогатого скота // Автореф. дисс. канд. биол. наук, Дубровицы, ВИЖ, 2001.
4. Mitra A., Schlee P., Balakrishnan C.R. et al. Polimorphism at growth hormone and prolactin loci in Indian cattle and buffalo // J. Anim. Breed. Genet. 1995. V. 112.P.71-74.
5. Schlee P., Graml R., et al. Influence of growth hormone genotypes on breed-ing values of Simmental bulls // J. Anim. Breed. Genet. 1994a. 111. P. 253-256.
6. Moody D.E., Pomp D., Barendse W. Restriction fragment length polymorphism in amplification products of the bovine Pit-1 gene and assignment of Pit-1 to bovine chromosome 1 // J. Animal Genetics. 1995. 26. 45-47
7. Журавель Е.В.,Глазко В.И. Полиморфизме по локусу к-казеина молока у различных пород крупного рогатого скота // Сельскохозяйственная биология. 1999. № 2. 120-124
8. Костюнина О.В. // Автореферат дисс. канд. биол. наук, Дубровицы. ВИЖ, 2004, 22 с.
9. Хатами С.Р. ДНК-полиморфизм генов пролактина и гормона роста у ярославской и черно-пестрой породы крупного рогатого скота // Автореф. дисс. канд. биол. наук, Москва, 2004.
10. Алипанах Массуд. Хозяйственно-полезные признаки коров с различными генотипами каппа-казеина и пролактина // Автореф. дисс. канд. биол. наук, Москва, 2006.
11. Luci M.C., Hauser S.D., Eppard P.J., Krivi G.G., Bauman D.E., Variants of somatotropin in cattle: gene frequencies in major dairy breeds and associated milk production // Domestic Animal Endocrinology – 1993 – 10, 325 – 333/
12. Dybus A. Association of growth hormone (GH) and prolactin (PRL) genes polymorphisms with milk production traits in Polish Black-and-White cattle // J. Animal Science Papers and Reports. 2002. V. 20. 203-212
13. Cosier V. et al., Research concerning the genetic structure of Romanian simental and maramures brown breeds at the pituitary transcription factor locus // Lucrări ştiintifice Zootehnie şi Biotehnologii. 2008. V. 41(1). 45-49
14. Dybus A. et all. PIT1-HinfI gene polymorphism and its associations with milk production traits in polish Black-and-White cattle // Arch. Tierz., Dummerstorf/ 2004. V 6. 557-563
15. Усенбеков Е.С. Автореферат дисс. канд. биол. наук, Санкт-Петербург – Пушкин, 1995, 17с.

16. Graml R., Buchberger J., Klostermeyer H., Pirchner F. Untersuchungen über die Genfrequenzen der Caseine und β-Lactoglobuline bei der bayerischen Braunviehpopulation // Züchtungskunde. 1984. 56, (4) S. 221-230.

Об авторах

Е.В. Дроздов– аспирант Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, drozdov2008@yandex.ru.

В.В Заякин. – док., проф. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, drozdov2008@yandex.ru.

И.Я. Нам - док. проф. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, drozdov2008@yandex.ru.

УДК 581.1:631.584.5

ВЛИЯНИЕ КЛУБЕНЬКОВЫХ БАКТЕРИЙ НА ОДНОВИДОВЫЕ И СМЕШАННЫЕ ПОСЕВЫ ЛЮПИНА И ЯЧМЕНЯ

А.С. Кононов, И.В. Белоус, Б.А. Петрушин

Были установлены преимущества растений люпина и ячменя обработанных штаммом 363а в смешанных посевах по сравнению с контрольными посевами без обработки.
Установлено усиление в смешанных посевах ростовых процессов, интенсивности транспирации, интенсивности фотосинтеза, содержания хлорофилла, ЧПФ, которые тесно взаимосвязаны между собой.
Ключевые слова: *смешанные посевы, рост, хлорофилл, люпин, ячмень, интенсивность транспирации.*

Одна из многих задач физиологии растений - нахождение путей эффективного повышения продуктивности сельскохозяйственных культур, что позволяет при удачном исходе решить ряд продовольственных и технических проблем. Существует несколько вариантов решения этой проблемы. В данном случае нами были проведены исследования над одновидовыми посевами люпина, смешанными посевами люпина и ячменя без обработки, а также смешанными посевами люпина и ячменя, обработанного штаммом клубеньковых бактерий.

Цель исследований – изучить влияние клубеньковых бактерий на одновидовые и смешанные посевы люпина и ячменя.

Методика исследований. Полевые исследования проводились на опытном поле БГУ в 2009 году. Объектами исследований были одновидовой посев люпина, смешанный посев люпина и ячменя без обработки, смешанный посев люпина и ячменя, обработанный штаммом 363 а. Для проведения исследований опытные образцы были высажены на трех вариантах в пятикратной повторности. Ширина делянки 1 метр, длина 2.5 метра.

Рост растений определяется методом измерения высоты стебля с точностью до одного знака после запятой. Для этого в каждом варианте берется случайная выборка 10 растений и измеряется их высота до верхнего листа. Измерения проводятся в два срока. Интервал проведения измерений составляет 5 дней. Среднесуточный прирост определяется как разностью между последним измерением высоты растений и первым. Интенсивность транспирации растений определялась весовым методом. Определение интенсивности фотосинтеза проводили при помощи прибора Л.А. Иванова и И.Л. Косович. Количество хлорофилла в листьях определяли на фотоколориметре КФК – 3. Интенсивность дыхания определяли методом титрования.

Результаты работы. Наши исследования показали, что прирост наблюдался во всех без исключения вариантах (табл.1), но с разной интенсивностью в различных посевах.

Рост растений люпина, как в одновидовых, так и смешанных посевах с обработкой и без, был примерно одинаков в начале исследований. За 5 дней в одновидовых посевах и смешанных посевах с обработкой штаммом 363 а прирост был примерно одинаков, а вот в смешанных посевах без обработки в 2 раза меньше (табл.1). Из этого следует, что на данный период вегетации растений интенсивность ростовых процессов люпина в смешанных посевах с обработкой штаммом 363а была значительно выше, чем люпина в смешанных посевах без обработки. Прирост растений люпина обработанного штаммом 363 а одинаков и немного даже выше, прироста люпина без обработки - это говорит о том, что даже испытывая конкуренцию со стороны ячменя, люпин в смешанном посеве с обработкой штаммом 363а отличался хорошим ростом стебля.

Таблица 1

Интенсивность ростовых процессов, в см

№	Вариант	Культура	Прирост за 5 дней, см	Средний прирост за 1 день, см
1	люпин (контроль)	Люпин	8,05	1,61
2	люпин + ячмень	Люпин	4,85	0,97
		Ячмень	12,2	2,44
3	люпин + ячмень + шт. 363А	Люпин	8,9	1,78
		Ячмень	11,7	2.34

Исследование интенсивности транспирации растений показало, что интенсивность транспирации ячменя в смешанных посевах без обработки и с обработкой штаммом 363 оказалась примерно равна (табл. 2). В то время как у люпина в смешанном и особенно в обработанном штаммом 363 а посеве она значительно превышает значения, полученные в одновидовом посеве.

Таблица 2

Интенсивность транспирации, мг/дм^2×час

№	Вариант	Культура	Интенсивность транспирации, мг /дм^2-час
1	люпин (контроль)	Люпин	571,4
2	люпин + ячмень	Люпин	1153,9
		Ячмень	566,9
3	люпин + ячмень + шт. 363А	Люпин	1469,4
		Ячмень	535,7

Исследования по определению интенсивности фотосинтеза показали интенсивность фотосинтеза у ячменя в смешанном посеве, обработанном штаммом 363 а, примерно, на 40% меньше, чем у ячменя в смешанном посеве без обработки (табл.3).

Таблица 3

Интенсивность фотосинтеза, мгCO_2/ дм^2-час

№	Вариант	Культура	Интенсивность фотосинтеза, мг CO_2/ дм^2-ч
1	контроль	Люпин	290,1
2	люпин (контроль) люпин + ячмень	Люпин	245,1
		Ячмень	121,8
3	люпин + ячмень + шт. 363А	Люпин	260,1
		Ячмень	72,1

У растений люпина – на 10,3% в смешанном посеве, обработанном штаммом 363 а и на 15,6% в смешанном посеве без обработки соответственно – снижается интенсивность фотосинтеза по сравнению с контролем – одновидовым посевом люпина (табл.3). Поглощение люпином CO_2 было больше, чем ячменем в смешанном посеве без обработки в 2 раза, а в смешанном посеве со штаммом 363а в 3 раза.

Интенсивность фотосинтеза имеет обратную зависимость с содержанием хлорофилла в листьях исследуемых растений. Исследования показали, что содержание хлорофилла у люпина и ячменя в смешанном посеве, обработанном штаммом 363 а повысилось по сравнению с смешанным посевом без обработки примерно в 2 раза (табл.4). В содержании хлорофилла в одновидовом и смешанном без обработки контрольных посевах существенных различий не выявлено.

Таблица 4

Содержание в листьях хлорофилла, в мг/л

№	Вариант	Культура	Содержание хлорофилла, мг/л
1	Люпин (контроль)	Люпин	20,5
2	Люпин + ячмень	Люпин	21,0
		Ячмень	54.5
3	Люпин + ячмень + шт. 363А	Люпин	37,6
		Ячмень	105,0

В результате опытов было обнаружено значительное увеличение чистой продуктивности фотосинтеза смешанных посевов люпина и ячменя, обработанных штаммом 363 а, по сравнению с другими одновидовыми посевами (табл.5).

Таблица 5

Чистая продуктивность фотосинтеза, г/м^2 за 1 сут

№	Вариант	Культура	Чистая продуктивность фотосинтеза, г/м^2 за 1 сут
1	люпин (контроль)	Люпин	1,4
2	люпин + ячмень	Люпин	1,5
		Ячмень	2,8
3	люпин + ячмень + шт. 363А	Люпин	2,9
		Ячмень	5,1

В результате работы по определению интенсивности дыхания, было установлено существенное уменьшение интенсивности дыхания в смешанных посевах люпина и ячменя, обработанных штаммом 363а (табл.6). У растений люпина со штаммом 363 а в раз меньше, чем у люпина в смешанном посеве без обработки и в 6 раз, по сравнению с люпином в одновидовом посеве соответственно.

Таблица 6

Интенсивность дыхания, в мг/г-час

№	Вариант	Культура	Интенсивность дыхания, мг/г-ч
1	Контроль		
2	люпин (контроль)	люпин	7,26
3	люпин + ячмень	люпин	5,21
		ячмень	6,09
4	люпин + ячмень + шт. 363А	люпин	2,27
		ячмень	1,17

Для ячменя было зафиксировано снижение интенсивности дыхания в растениях смешанного посева, обработанных штаммом 363 а, немногим более чем в 5 раз по сравнению с ячменем в смешанном посеве без обработки (табл.6).

Заключение. В результате исследований было доказаны значительные преимущества растений люпина и ячменя обработанных штаммом 363а в смешанных посевах по сравнению с контрольными посевами. Установлено усиление в смешанных посевах ростовых процессов, интенсивности транспирации, интенсивности фотосинтеза, содержания хлорофилла, ЧПФ, которые тесно взаимосвязаны между собой.

Таким образом, нами доказано более целесообразное использование в агропромышленном комплексе смешанных люпино-злаковых посевов, для повышения урожайности.

Advantages of plants lupinus and barley processed shtamm 363a in the mixed crops in comparison with control crops without processing have been established.
Strengthening in the mixed crops grouth processes, intensity transpiration, intensity of photosynthesis, the chlorophyll maintenance, CPP which are closely interconnected among themselves is established.
The key words: *the mixed crops, growth, a chlorophyll, lupinus, barley, intensity transpiration.*

Об авторах

А.С. Коконов – док., проф. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

И.В. Белоус - студент Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

Б.А. Петрушин - студент Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

УДК 581.1:631.584.5

СОДЕРЖАНИЕ ХЛОРОФИЛЛА И ЧИСТАЯ ПРОДУКТИВНОСТЬ У ЛЮПИНА И ЯЧМЕНЯ В ОДНОВИДОВОМ И ЛЮПИНО-ЗЛАКОВОМ АГРОЦЕНОЗЕ

А.С. Кононов, М.Ю.Никитушкина

В гетерогенном агроценозе у азотфиксирующего растения количество хлорофилла в листьях люпина и не азотфиксирующего злака - коррелирует с изменением обменных процессов, что связано с направленностью химических реакций, повышающих содержание хлорофилла при рассеянной солнечной радиации и благоприятно влияющих на азотный обмен и чистую продуктивность культур.
Ключевые слова: *хлорофилл, азотфиксация, люпин, смешанный посев*

Углеродный цикл растений во многом определяет величину накопления биомассы. Известно, что интенсивность фотосинтеза возрастает с увеличением содержания хлорофилла [1]. Однако, несмотря на установленные факты влияния фотосинтеза, на процессы роста и развития растения до конца не ясным остается связь аддитивного воздействия процесса фотосинтеза в бобово-злаковом агроценозе на эффективность самого процесса фотосинтеза у компонентов этого ценоза.

Цель исследований – выявить причинно-следственные связи влияния компонентов смешанных люпино-злаковых посевов на эффективность фотосинтеза.

Методика исследований. Полевые исследования проводились на опытном поле БГУ в 2009 году. Объектами исследования был узколистный люпин сорт Белозерный 110, ячмень Зазерский 85. Соотношения компонентов в гетерогенной системе составляло: люпин – 1,0 млн., ячмень - 1,6 млн. всхожих семян на 1 га. Повторность в опыте 6-ти кратная, размер учетной делянки 1 м^2. Полевые опыты проводили по схеме, представленной в табл.1. Изучали штаммы клубеньковых и ассоциативных бактерий (табл.1). Количество хлорофилла в листьях определяли на фотоколориметре СФ-2000. Интенсивность транспирации – весовым методом. ЧПФ рассчитывали по методике Ничипоровича (1978). Определение интенсивности фотосинтеза проводили при помощи прибора Л.А. Иванова и И.Л. Коссович [2]. Статистическую обработку данных по методу дисперсионного анализа [3].

Результаты работы. Наши исследования показали, что в смешанных люпино-злаковых агроценозах уже к фазе начала бутонизации люпина вегетативная масса ячменя возрастает на 15-20 % по сравнению с контролем его одновидовым посевом.

В результате исследований установлено увеличение содержания хлорофилла в культурах-компонентах смешанного посева по сравнению с одновидовым (табл.1). В листьях люпина в смешанном посеве содержание хлорофилла возрастает по сравнению с одновидовым посевом на 31,7%, а у ячменя на 14,9%. На вариантах, где наблюдалось увеличение содержания хлорофилла в листьях люпина, там и наблюдали увеличение содержания этого пигмента и в листьях ячменя (табл.1). Данные таблицы1 показывают, что в смешанном посеве с обработкой семян клубеньковыми бактериями штамм 363а количество хлорофилла - а уменьшается, а количество хлорофилла b увеличивается.

Таблица 1

Влияние клубеньковых бактерий на содержание хлорофилла а и b в листьях люпина и ячменя в люпино-ячменном агроценозе, в мг/г (сухой массы органа растения)

№ варианта	Вариант		Количество хлорофилла а, мг/г	Количество хлорофилла b	Сумма хлорофиллов а и b	Отношение хлорофилла а к b
1	Люпин одновидовой посев - контроль		130,6	21,0	151,6	6,22
2	Ячмень одновидовой посев - контроль		104,8	73,5	178,3	1,43
3	Люпин + ячмень - контроль	люпин	133,3	66,3	199,6	2,01
		ячмень	131,3	73,6	204,9	1,78
4	Люпин + ячмень + штамм 363а	люпин	142,6	66,3	208,9	2,15
		ячмень	128,9	86,1	215,0	1,48
5	Люпин + ячмень + флавобактерин	люпин	151,3	75,4	226,7	2,03
		ячмень	127,9	115,9	243,8	1,10
6	Люпин + ячмень + флавобактерин + штамм 363а	люпин	146,1	68,9	213,1	2,01
		ячмень	135,2	120,5	250,7	1,12

Установлено, что суммарное количество хлорофилла – a и b возастает. Эта тенденция наблюдается и на других вариантах смешанных посевов. В общей сумме у люпина и ячменя в одновидовых посевах хлорофилл a + b составляет 329,9 мг/г сухой массы органа растения. В хлорофилл смешанных без инокуляции семян a+b 404,5 мг/г или на 22,6% больше. В одновидовых посевах у ячменя в общей сумме хлорофилл a+b составляет 178,3 мг/г, у люпина 151,6 мг/г или на 17,6% больше. Однако отношение хлорофилла a к хлорофиллу b у люпина составляет 6,22, у ячменя только 1,43. Из этих данных видно, что в количество хлорофилла a заметно больше у люпина, а по сравнению с ячменем. Известно, что в процессе фотосинтеза хлорофилл a обеспечивает наиболее высокую эффективность процесса превращения диоксида углерода и воды в органические вещества. Поэтому не случайно люпин является более продуктивной по биомассе культурой, чем ячмень. В смешанных посевах заметно увеличение количества хлорофилла b в растениях люпина примерно, в 3,1-3,6 раза в сравнении с одновидовыми посевами. В листьях ячменя в смешанных посевах наоборот интенсивно возрастает содержание хлорофилла a на 22,0-29,0% к контролю, что больше, чем у люпина почти в 2 раза. При этом содержание хлорофилла –b у ячменя в смешанных посевах увеличивается только на 17.1-63.7% к одновидовому посеву. Как, известно хлорофилл b образуется из хлорофилла a. Таким образом, наши исследования показывают, что в смешанных посевах в результате затенения растений люпина ячменем увеличивается общая сумма хлорофиллов в листьях при снижении в три раза отношения хлорофилла - a к хлорофиллу - b, что благоприятно влияет на накопление биомассы.

Исследования показали, что интенсивность транспирации в смешанных агроценозах выше, чем в одновидовых посева (табл.2). Особенно это видно в смешанном посеве с обработкой семян флавобактерином.

Таблица 2

Влияние клубеньковых бактерий на процессы фотосинтеза и интенсивности транспирации

№	Вариант		ЧПФ, г/м^2	УЛПР, м^2/г	ИТ, мг/дм^{2}час
1	Люпин одновидовой посев - контроль		4,326	0,122	9,4
2	Ячмень одновидовой посев - контроль		3,678	0,212	4,36
3	Люпин + ячмень + штамм 363а	люпин	5,490	0,204	9,6
		ячмень	4,336	0,233	4,37
4	Люпин + ячмень + флавобактерин	люпин	6,986	0,297	9,88
		ячмень	3,821	0,245	5,42
5	Люпин + ячмень + штамм 363а + флавобактерин	люпин	5,728	0,257	9,79
		ячмень	3,980	0,237	4,48

Установлено, что тенденция роста интенсивности транспирации в смешанных посевах у растений люпина заметно выше, чем у ячменя. Это вероятно связано с тем, что исследование проводилось в утреннее время. В смешанном посеве с обработкой флавобактерином наблюдаются самые высокие показатели интенсивности транспирации (табл.2). Сумма транспирации люпина и ячменя в 2,2 раза бала выше, чем средняя сумма транспирации одновидовых посевов люпина и ячменя.

Установлено, что чистая продуктивность фотосинтеза находится в прямой зависимости от количества хлорофилла. Если сравнить смешанные посевы с обработкой ассоциативными азотфиксирующими бактериями штамм363а и смесь штамм363а с флавобактерином, можно заметить, что во втором варианте сумма количества хлорофиллов выше, чем в первом (табл.1). Следовательно, чистая продуктивность фотосинтеза и интенсивность транспирации тоже выше. Известно, что интенсивность транспирации препятствует поглощению углекислоты. Из данных таблицы 2 видно, что общая биомасса выше у тех посевов, где эффективность фотосинтеза выше. Изучение интенсивности ростовых процессов в люпино-злаковых посевах показало, что сумма чистой продуктивности фотосинтеза при обработке смешанного посева клубеньковыми бактериями и ассоциативными азотфиксаторами в 2,43-2,7 раза выше, чем средняя сумма чистой продуктивности фотосинтеза в одновидовых посевах люпина и ячменя (табл.2).

Обсуждение. Интенсивность ростовых процессов злаковых культур можно предположить связана с химической аллелопатией корневых систем - влиянием физиологически активных веществ в частности фитогормонов выделяемых корнями люпина в почве и высокой активностью азотфиксирующих клубеньковых бактерий и ассоциативных микроорганизмов в ризосфере. В процессе фиксации молекулярного азота растениями люпина происходит ферментативное восстановление N_2 до аммиака. Аммиак в клетках связывается органическими кислотами и в форме амидов транспортируется по растению, как в базиопетатальном, так и в акропетальном направлении. Можно предположить, что избыток основных амидов аспарагина и глутамина поступает по флоэме в корневую систему и в результате экзосмоса выделяется в почву. Общее количество таких выделений, отчуждаемых корнями растений, по расчетам И.П. Бабьевой, Г.Н. Зеновой [4], достигает 30-50% от суммарной продукции фотосинтеза за вегетационный период. По данным А.М.Гродзинского [5], активные водорастворимые органические выделения корней могут составлять 30-40 ц/га при общем урожае корневой системы равной 60-70 ц/га сухого вещества. Значение этого механизма состоит в том, что в фитоценозе создается как бы общий пул органических веществ, который пополняется всеми участниками сообщества, и они же из него черпают, в свою очередь, необходимые им соединения [6].

В опытах А. М. Гродзинского [5] установлено, что в условиях водных культур и в полевых опытах с люпином и овсом происходил обмен меченой углекислотой. На первых этапах рост люпина замедлен. Фаза всходы-розетка длится 3-4 недели. Начиная с фазы стеблевания, азотфиксирующая способность растений увеличивается, и они начинают снабжать растение-хозяина азотистыми веществами. В этот и последующий период азотфиксации клубеньковые бактерии получают от люпина огромное количество углеводов, так как интенсивность фотосинтеза в этот период наиболее высокая. Как установил Кретович В.Л. [7] клетки *Rhizobium lupini* на каждый грамм фиксации азота используют от 3 до 6 г углерода. Еще более затратным является процесс потребления углеводов у азотобактера. Для связывания одного грамма азота он перерабатывает 70-100 глюкозы, а эффективность этого процесса составляет 1,5-2,0%. Исследования Г.С.Посыпанова [8], А.С. Кононова [9] подтвердили мнение о том, что небольшие дозы азота на ранних фазах роста полезны для растений люпина. В смешенных посевах люпина с яровой пшеницей на фоне N_{60} урожайность зерна возрастала на 22 % [1]. При достаточном количестве азота молодые растения люпина меньше страдают от паразитизма клубеньковых бактерий на фазе всходы-розетка. Уникальные функции симбиотрофных организмов приобретают особое значение в связи с возможностью использования биологических механизмов питания растений азотом, что особенно важно в гетерогенных агроценозах..

Можно предположить, что количество синтезируемого пигмента хлорофилла в листьях растений показывает направленность процесса фотосинтеза и его величину в гетерогенной системе.

Заключение. Исследования показали, что в гетерогенной системе включающей различающиеся по биологии растения количество хлорофилла в листьях люпина и не азотфиксирующего ячменя - коррелирует с изменением обменных процессов, что связано с направленностью химических реакций, увеличивающих содержание хлорофилла при рассеянной солнечной радиации и благоприятно влияющих на азотный обмен и чистую продуктивность фотосинтеза люпина и ячменя по сравнению с их одновидовыми посевами.

In intercropping agrocenoze beside nitroginfixcacion plants amount chlorophyll in of the lupine, sheet and not nitroginfixcacion barley – link the fraudulent processes with change that is connected

with directivity chemical reaction, reducing contents antozian in cotyledon under diffused solar radiation and favourable influencing upon nitric changing the cultures.
The key words: *chlorophyll, nitroginfixcacion, lupine, mixed sowing*

Список литературы

1. Якушкина Н.И. Физиология растений : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности 032400 «Биология» / Н.И. Якушкина, Е.Ю. Бахтенко. М. : Гуманитар, изд. центр ВЛАДОС, 2005. 463 с.

2. Сказкин Ф. Д., Ловчиновская Е. И., Красносельская Т.А., Миллер М. С., Аникиев В. В. Практикум по физиологии растений / Под ред. Сказкина Ф.Д. Советская наука. М.:1953. С.156-157.

3. Доспехов Б. А. Методика полевого опыта.М.: Агропромиздат, 1985. 351с.

4. Бабьева И.П., Зенова Г.М. Биология почв. М., изд-во МГУ, 1989. 336 с.

5. Гродзинский А.М. Аллелопатия растений и почвоутомление. Киев, 1991. 432 с.

6. *Winter F.G.Allelopathie als Stoffwauderung und Stoffumwandlund // Ber.Dtsch. hort. Ges. 1960.Bd.73.№9.*

7. Кретович В. Л. Биохимия растений. М.: Высш. школа, 1986. 553с.

8. Посыпанов Г.С. Биологический азот // Проблемы экологии и растительного белка.- М., изд-во МСХА, 1993.

9. Кононов А. С. Люпин: технология возделывания в России. Брянск, 2003. 212 с.

Об авторах

А.С. Коконов – док., проф. Брянского государственного университета, им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

М.Ю. Никитушкина – аспирант Брянского государственного университета, им. академика И.Г. Петровского, bryanskgu@ mail.ru.

УДК 504. 064. 47

РЕГЕНЕРАЦИОННАЯ УТИЛИЗАЦИЯ МЕДЬСОДЕРЖАЩИХ ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ РАСТВОРОВ

Ал.А. Пашаян, О.С. Щетинская, А.А. Пашаян

Рассмотрены химические и экологические проблемы утилизации гальванических растворов, содержащих ионы меди. Показано, что дифференцированные подходы к различным составам электролитов позволяют осуществить количественное выделение из них и регенерацию составных компонентов отработанных гальванических растворов. Такой подход обеспечивает высокие эколого-экономические показатели предложенных процессов.
Ключевые слова: *гальваниечекие электролиты, утилизация, регенерация, комплексы меди.*

В процессах нанесения гальванопокрытий образуются отработанные концентрированные электролиты. Такие растворы (I класс опасности) подлежат утилизации в очистных сооружениях.

Процесс утилизации объединенных гальванических стоков [содержащих Cu^{2+}, Zn^{2+}, Fe^{2+}, Fe^{3+}, Ni^{2+}(далее Me^{n+}) и Cr^{6+}(в составе аниона $Cr_2O_7^{2-}$)], сводится к двухступенчатой процедуре [1].

1. Восстановление хрома (VI) в хром (III) в кислой среде сульфатом железа (II) или сульфитом натрия:

$$Na_2Cr_2O_7 + 4H_2SO_4 + 3Na_2SO_3 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 4Na_2SO_4 + 4H_2O$$

2. Подщелачивание кислых стоков оксидом кальция:

$$CaO + H_2SO_4 + Me^{n+} + H_2O \rightarrow CaSO_4 \downarrow + Me(OH)_n \downarrow + Ca(OH)_2 \downarrow$$

Образовавшийся в результате подщелачивания осадок в отстойниках обезвоживается и отводится в шламонакопители. В настоящее время во всем мире накоплено миллиарды тонн гальваношлама, и его количества растут угрожающими темпами, что может привести к экологической катастрофе. В РФ и странах СНГ ежегодно под полигоны для хранения этих шламов отводится 30 тыс. гектаров [2].

Имеются множество разработок по использованию гальваношламов в металлургии, гидрометаллургии, в производстве гипса, дорожно-строительных материалов, заполнителей легких бетонов, керамзита, цемента, пигментов, стекла, керамики, кирпича и др [1]. Однако, из-за технологических особенностей их переработки, гальваношламы не востребованы. Поэтому, из общего количества шламов утилизируется лишь 0,01- 1,5% от массы [2].

Лучшим решением проблемы гальваношламов является предотвращение их образования, внедрением технологий регенерационной утилизации гальванических растворов. С химической точки зрения этого можно достигнуть различными подходами:

1. Заменить серную кислоту фосфорной. Тогда гальваношлам будет представлен в виде смеси фосфатов кальция и цветных металлов. Такую смесь можно использовать как смешанное макро (отрофосфат кальция) и микро (фосфаты цветных металлов) фосфорное удобрение пролонгированного действия (все фосфаты не растворимы в воде);

2. Отделить хромсодержащие стоки и восстановить хром (VI) в хром (III) в кислой среде, а процесс подщелачивания осуществить гидроксидом натрия. Тогда в осадке окажется только гидроксид хрома (III), а в растворе останется сульфат натрия.

3. Обработать отдельные гальванические растворы (кроме циан- и хромсодержащих) щелочью и выделить чистые гидроксиды соответствующих металлов.

Можно показать, что при значениях pH=9 в стоках содержание всех катионов не превышает ПДК [3].

Теоретически рассчитанные значения концентраций катионов металлов (табл. 1) в слабощелочном (pH = 9) стоке, кроме никеля (II), намного ниже установленных для этих катионов значений ПДК. В случае с никелем уже при pH=11 содержание катиона в 17 раз ниже ПДК.

Таким образом, можно предположить, что утилизация гальванических стоков по вышеприведенной схеме позволит обеспечить количественную и качественную очистку стоков от катионов металлов.

Таблица 1.

Теоретически рассчитанные концентрации катионов металлов в гальванических стоках, при pH=9 ($[OH^-]=10^{-5}$ моль·л$^{-1}$).

№ п/п	Гидроксид металла	$ПР_{Me(OH)n}$	$C_{Me^{n+}}$ моль·л$^{-1}$	$C_{Me^{n+}}$ мг·л$^{-1}$	*ПДК(Me^{n+}) мг·л$^{-1}$(моль·л$^{-1}$)	C(Me^{n+}) / ПДК(Me^{n+})
1	$Cu(OH)_2$	$2,2x10^{-20}$	$2,2x10^{-10}$	$1,4x10^{-5}$	0,01 ($1,57x10^{-7}$)	1, $4x10^{-3}$
2	$Fe(OH)_2$	$1x10^{-15}$	$1x10^{-5}$	$5,6x10^{-1}$	0,3 ($5,36x10^{-6}$) **	$1,8x10^{-2}$
4	$Zn(OH)_2$	$1x10^{-17}$	$1x10^{-7}$	$6,5x10^{-3}$	1,0 ($1,5x10^{-5}$)	$6,7x10^{-3}$
6	$Ni(OH)_2$	$1x10^{-15}$	$1x10^{-5}$	$5,87x10^{-1}$	0,1($1,7x10^{-6}$)	6 ($6x10^{-}$)***
7	$Cr(OH)_3$	$6,7x10^{-31}$	$6,7x10^{-16}$	$3,5x10^{-11}$	0,1 ($2x10^{-6}$)	$3,35x10^{-10}$
8	$Fe(OH)_3$	$3,8x10^{-38}$	$3,8x10^{-13}$	$2,2x10^{-8}$	0,3 ($5,36x10^{-6}$) **	$7x10^{-8}$

*Водные объекты хозяйственно-питьевого и культурно-бытового назначения.

** Значения ПДК приводятся для суммарного количества Fe^{2+} и Fe^{3+}.

*** При рН=11.

Однако, исходя из производственной необходимости, в состав гальванических растворов, чаще всего в электролиты меднения, вводят комплексообразующие компоненты [этилендиаммин, этилендиаминтетрауксусную кислоту (далее в тексте Edta), тартраты (чаше всего сегнетову соль), аммиак, тиомочевину, блескообразователи, различные ПАВ, пирофосфаты и т.п.). Наличие комплексонов в отработанных электролитах предотвращает образование нерастворимых гидроксидов металлов (в частности меди) в щелочной среде /5/. Поэтому, такие отработанные электролиты ($C_{Cu}^{2+} \le 60$ г·л$^{-1}$) не могут быть утилизированы по вышеописанной технологии, так как для образования $Cu(OH)_2$ при рН=9 C_{Cu}^{2+} должна быть > 10^{-10} моль·л$^{-1}$ (см. табл. 1.), тогда как в растворе концентрация свободных катионов Cu^{2+} ($pK_1Edta^{4-} = 18{,}8$) составляет 10^{-21} моль·л$^{-1}$. Поэтому, отработанные электролиты меднения не смешивают с общими гальваническими стоками, в результате чего они накапливаются.

Только в Брянской области к 2003 году на предприятиях было накоплено 1497 тонн гальванических растворов и гальваношламов (II класс опасности) [6].

Наиболее простым химическим решением для рассмотренных случаев можно рекомендовать процессы восстановления катионов меди атомарным водородом в момент его рождения с применением активных металлов, таких как железо и алюминий (в кислой среде) и алюминий в щелочной.

Однако, при этом расход восстанавливающего металла в 5-6 раз превышает теоретически ожидаемый, из чего следует перерасход кислоты (щелочи) и необходимых агентов для завершения процесса с получением нейтральной очищенной воды.

Так, при исходном содержании катионов меди на уровне 20г·л$^{-1}$ (0,3 моль·л$^{-1}$) для полного их удаления из 1м^3 отработанного раствора по ниже представленной схеме, приняв пятикратный перерасход железа, ожидаются следующие расходы реагентов (в кг): серная кислота (150), железо (84), гидроксид натрия(120). При этом будет образовываться: сульфат натрия (212), гидроксид железа (135) и медь (192).

$$Fe + 2H^+ \rightarrow Fe^{2+} + 2H; \qquad 2H + Cu^{2+} \rightarrow Cu\downarrow + 2H^+;$$

$$Fe^{2+} + H_2SO_4(изб.) \xrightarrow{NaOH} Fe(OH)_2\downarrow + Na_2SO_4 + 4H_2O$$

Однако, такая вода еще не может быть сброшена в коллектор, так как предстоят процессы выделения комплексообразующих лигандов и растворенных солей, к примеру соли винной кислоты, ЭДТА, аммония и т.п.

Примерно такие же расходы необходимы при применении металлического алюминия в щелочной среде.

Технологической проблемой при этом оказывается удаление мелкодисперсных и плохо фильтрующихся осадков гидроксида железа (II) или алюминия. Как показали наши исследования, на промежуточных стадиях восстановления катионов меди (II), происходят процессы их диспропорции:

$$Cu^{2+} + Cu \rightarrow 2Cu^+; \qquad 2Cu^+ + H_2O \rightarrow Cu_2O\downarrow + 2H^+$$

В результате металлическая медь загрязняется ее оксидом (I), следовательно, предстоят дополнительные процессы ее очистки.

Исходя из экономической и технологической целесообразности необходимо сочетать процессы цементации меди на железе и восстановление Cr^{6+} в Cr^{3+} из хром- и медьсодержащих смешанных гальванических стоков. При этом, без дополнительных расходов и применения восстановителей, удается полностью осуществить процесс восстановления хрома(VI):

$$3Fe^{2+} + Cr^{6+} \rightarrow 3Fe^{3+} + Cr^{3+}; \qquad Fe^{3+} + Cr^{3+} + 6OH^- \rightarrow Fe(OH)_3\downarrow + Cr(OH)_3\downarrow$$

Выделение из растворов металлической меди сопряжено с проблемой дальнейшего ее применения. Между тем цены солей меди и комплексонов растут и оказывают существенное влияние на себестоимость гальванической продукции. Поэтому, наиболее приемлемыми необходимо считать процессы регенерационной утилизации медьсодержащих гальванических растворов, позволяющие выделить и возвращать в технологический цикл соединения меди, комплексоны и все другие составляющие отработанных гальванических растворов.

Из-за большого разнообразия электролитов меднения по составу (тип лиганда), в каждом отдельном случае необходимо применить отдельную технологию регенерационной утилизации.

1. Медно-аммиачные электролиты (как щелочные, так и кислые) применяются при электрохимическом меднении. Состав этих электролитов ($г \cdot л^{-1}$) представлен ниже:

1.1. Щелочного травления: хлорид меди (120), аммония (100), аммиак (100);

1.2. Кислого травления: хлорид меди (240), аммония (60), соляная кислота (20).

2. Электролиты химического меднения в щелочной среде содержат ($г \cdot л^{-1}$):

2.1. Сульфат меди (10), гидроксид натрия (10), калий-натрий тартрат (60), сода (7);

2.2. Сульфаты меди (100), аммония (50) и натрия (50), этилендиаммин (60) /5/.

2. 3. Сульфат меди (15), гидроксид натрия (15), Трилон-Б (30).

Ниже представлены результаты наших исследований, позволяющих осуществить утилизацию перечисленных выше отработанных электролитов меднения (нумерация в соответствии с текстом), с выделением и регенерацией практически всех составляющих компонентов электролитов.

1. Взаимная нейтрализация растворов 1.1. и 1.2 при смешении их в пропорциях, обеспечивающих минимальное содержание в растворе катионов меди с выделением труднорастворимого соединения гидроксохлорида меди.

Известны две разновидности основного хлорида меди (II): $CuCI_2 \cdot Cu(OH)_2 \cdot xH_2O$ – желто-зеленые кристаллы и $CuCI_2 \cdot 3Cu(OH)_2 \cdot xH_2O$, , сине-зеленые кристаллы, где x = 0 – 3 [7].

Методом обратного титрования показано, что молярная масса эквивалента хлорида гидроксомеди составляет $71{,}5 г \cdot моль^{-1}$, а число эквивалентности 3. Это соответствует структуре $Cu(OH)Cl \bullet Cu(OH)_2$.

$$[Cu(NH_3)_4]Cl_2 + CuCl_2 + 3NH_3 + 4HCl + 3H_2O \text{ à } [Cu(OH)Cl \bullet Cu(OH)_2]\downarrow + 7NH_4Cl$$

После удаления осадка хлорида гидроксомеди $C[Cu^{2+}{}_{(остаточн)}] = 100 мг \cdot л^{-1}$, $C(NH_4Cl) = 370 г \cdot л^{-1}$. Осадок промывают, маточные растворы объединяют, удаляют воду кипячением, уменьшая их объемы в 10 раза. Выделяют кристаллы хлорида аммония. К маточному раствору добавляют двукратный объем гидрофильного органического растворителя, дополнительно выделяют кристаллы хлорида аммония, перегонкой удаляют органический растворитель, кубовый остаток подкисляют, металлическим железом восстанавливают катионы меди (II), раствор нейтрализуют, удаляют осадок гидроксида железа (II) и (III).

Осадок гидроксохлорида меди подкисляют концентрированной соляной кислотой, получают концентрат хлорида меди.

$$[Cu(OH)Cl \bullet Cu(OH)_2]\downarrow + 3HCl \rightarrow 2CuCl_2 + 3H_2O$$

Степень извлечения (%): хлорид аммония (95), катионы меди (98).

Очищенная вода, уменьшенная по объему в 10 раз, по составу удовлетворяет гигиеническим нормативам и может быть сброшена в городской коллектор.

2.1 При утилизации электролита химического меднения, содержащего сегнетову соль в качестве комплексообразователя, были рассмотрены различные подходы:

- удаление из раствора и регенерация трудно растворимого в воде гидротартрата калия в сегнетову соль.

$$Na_2K_4[Cu(Tart)_4] + 4HCl \xrightarrow{KCl} 2NaCl + 4KHTart\downarrow + CuCl_2$$

$$KHTart\downarrow + NaOH \text{ à } KNaTart_{(раствор)} + H_2O$$

Однако, при этом не удавалось осуществить количественное разрушение тартратных комплексов меди, и катионы меди оставались в растворе в виде молекулярного хелата [Cu(Tart)], что не позволяло удалить из растворов нерастворимые гидроксо соединение меди.

- удаление остатков винной кислоты из раствора в виде не растворимого в воде кальция тартрата позволяет очистить воду от меди. Однако, при этом образуется смесь осадков тартрата кальция и его медно - тартратного комплекса (предположительно $Ca[Cu(Tart)_2]$ структуры), что не позволяет регенерировать катионы меди и остатки винной кислоты.

Такая же ситуация складывается и при очистке отработанных растворов, содержащих комплексы катионов меди (II) с трилоном-Б (или Edta).

В работе [8] Edta выделяют из отработанного раствора в виде нерастворимого в воде соединения при pH = 1,6 - 2,0 в присутствии сильного восстановителя - гидразина, осуществляя перемешивание раствора барботированием инертным газом.

Показано [8], что растворимость Edta в воде сильно зависит от значения pH среды, а ее комплексы при pH = 1,0 - 2,0 с катионами Fe^{3+} и Cu^{2+} в присутствии гидразина разрушаются, и свободная Edta из раствора выпадает в осадок, так как Edta с Fe^{2+} и Cu^{+} с образует менее прочные комплексы. Поэтому 82-86% количества Edta при pH = 1,15 выпадает в осадок.

Как показали наши исследования, для осуществления регенерационной утилизации таких растворов может быть рекомендован способ, в котором $[CuEdta]^{2-}$ в щелочной среде восстанавливают до Cu_2O восстанавливающим моносахаридом, а освободившуюся от меди Edta количественно удаляют при pH=1,5-2,0.

$$Na_4Edta + 4HCl \rightarrow 4NaCl + H_4Edta\downarrow$$

$$Cu_2O\downarrow + 2H_2SO_4 + 2NaOCl \rightarrow 2CuSO_4(\text{водный концентрат}) + 2H_2O + 2NaCl$$

Таким образом, разработанные нами методы регенерационной утилизации гальванических электролитов медного травления показали свою универсальность и эколого-экономическую целесообразность:

- разработанные методы позволяют очистить воду до уровня требуемых гигиенических норм;

- благодаря разумному сочетанию применяемых химических процессов удается практически количественно регенерировать все составные компоненты гальванических электролитов.

Приведенные выше исследования отражены в работах [9-12] и схематически иллюстрированы в рисунках 1-4.

Are considered chemical and environmental problems of recycling of the galvanic solutions containing ions of copper. It is shown that the differentiated approaches to various structures of electrolits allow to carry out quantitative allocation from them and regeneration of compound components of the fulfilled galvanic solutions. Such approach provides high ecologic and economic indicators of the offered processes.

The key words: *galvanic electrolytes, recycling, regeneration, copper complexes.*

Список литературы

1. Зайнулин Х.Н. Утилизация осадков сточных вод гальванических производств [Текст] / Х. Н Зайнулин, В. В. Бабков, Д. М., Закиров, Е. М. Исакова - М.: Издательский дом «Руда и металлы», 2003. 272с.

2. Инженерная защита окружающей среды [Текст] /Под общей редакцией Ю.А. Бирмана, Н. Г. Вурдовой: М.: Изд-во АСВ, 2002. 296с.

3. Предельно допустимые концентрации (ПДК) химических веществ в воде водных объектов хозяйственно питьевого и культурно-бытового водопользования. Гигиенические нормативы ГН 2.1:15.1315-03. - М.: СТК «Аякс» 2004. 154с.

4. Мельников, П.С. Справочник по гальванопокрытиям в машиностроении. [Текст] / П.С. Мельников - 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 19991.384с.

5. Главное управление природных ресурсов и охраны окружающей среды МПР России по Брянской области. Доклад «О состоянии окружающей среды Брянской области». Брянск. 2003-2004г.г.

6. Химический энциклопедический словарь [Текст] / гл.ред. И.Л. Кнунянц. М.: Сов. Энциклопедия, 1983. 792с.

7. Пат 2213064 РФ, МПК[7] 6C02 F 1/58, C07C 229/16. Способ регенерации этилендиаминтетрауксусной кислоты из отработанного промывочного раствора парогенераторов электростанций [Текст] /Иванов В.Н., Ермолаев Н.П., Смыков В.Б; заявитель и патентообладатель Иванов В.Н., Ермолаев Н.П., Смыков В.Б. № 2002104679/12; заявл. 2002.02.26; опубл. 2003.09.27.

8. Пат. 2334023 РФ, МПК C 25 B 15/00, C 22 B 3/20, C 23 G 1/36. Способ регенерационной очистки медно-аммиачных травильных растворов [Текст] / Пашаян А. А.. Щетинская О.С., Пашаян Ал. А.; заявитель и патентообладатель Брянский государственный университет; заявл. 05.02.2007; опубл. 20.09.2008.

9. Пат. 2343225 РФ, МПК C 23F 1/46, C 22G 1/36. Способ регенерационной очистки щелочных растворов меднения [Текст]/ Пашаян А.А, Пашаян Ал. А.; заявитель и патентообладатель БГИТА; заявлено 05.05.2007; опубл. 10.01.2009.

10. Пашаян, Ал. А. Эколого - экономическая оценка регенерационных методов очистки сточных вод. Критический анализ [Текст]. /Ал. А. Пашаян, А.А. Пашаян, С.В. Лукашов // Передовые технологии России. 2004.С. 4-7.

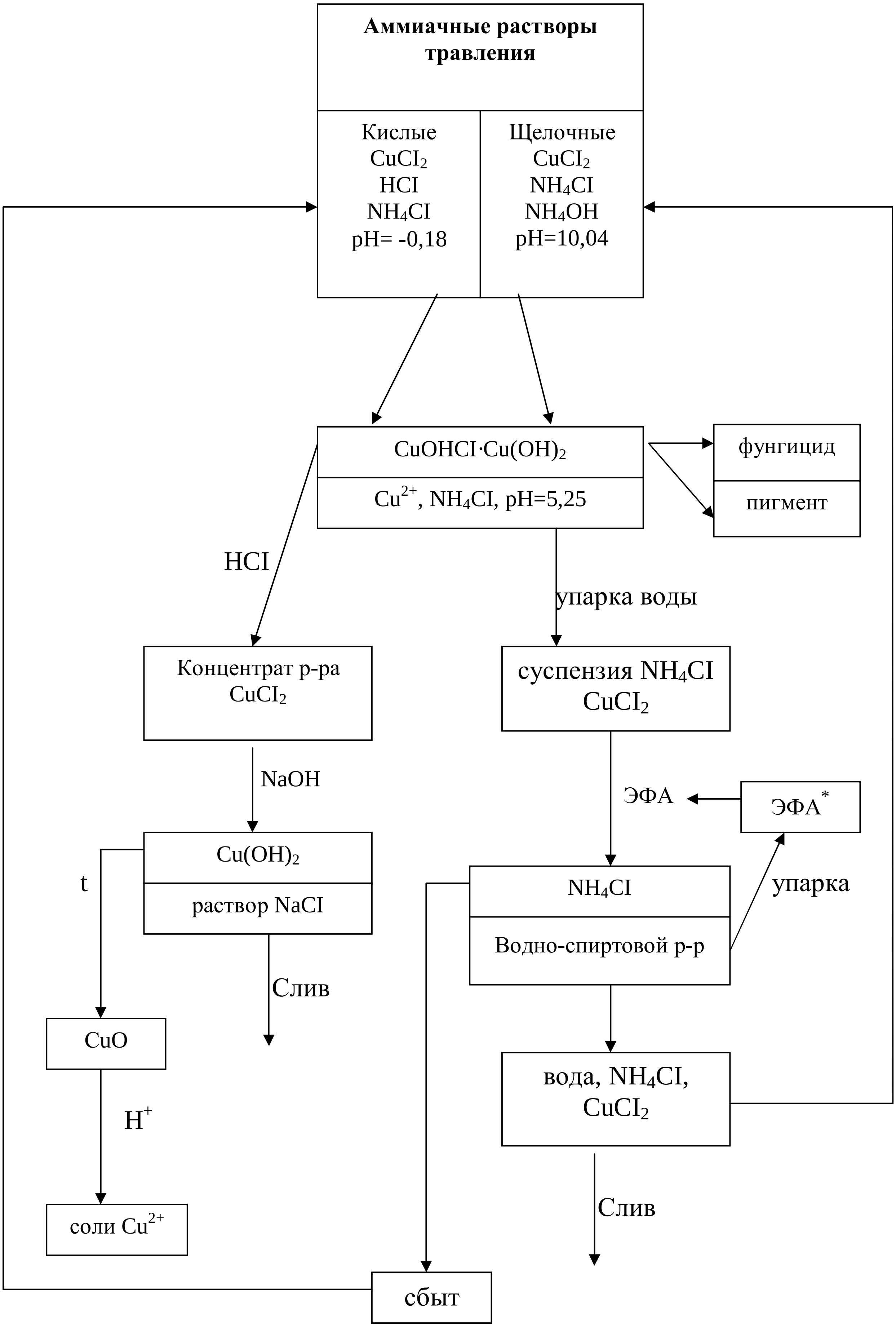
11. Пашаян, Ал. А. Новые решения и эколого-экономические подходы при утилизации растворов медного травления [Текст]/ Ал. А. Пашаян, А.А. Пашаян, Н.Н. Роева, О. С. Щетинская // Экология и промышленность России. 2007. №10. С.36-38.

Об авторах

А.А. Пашаян – док., проф. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, pashayan_ararat@mail.ru.

Ал.А. Пашаян - канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, pashayan_ararat@mail.ru.

О.С. Щетинская – канд., доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, pashayan_ararat@mail.ru.



ЭФА-эфирно-альдегидная фракция (смесь этанола, ацетальдегида. этилацетата, метанола).

Рису 1 - Регенерационная утилизация медно-аммиачных травильных растворов.

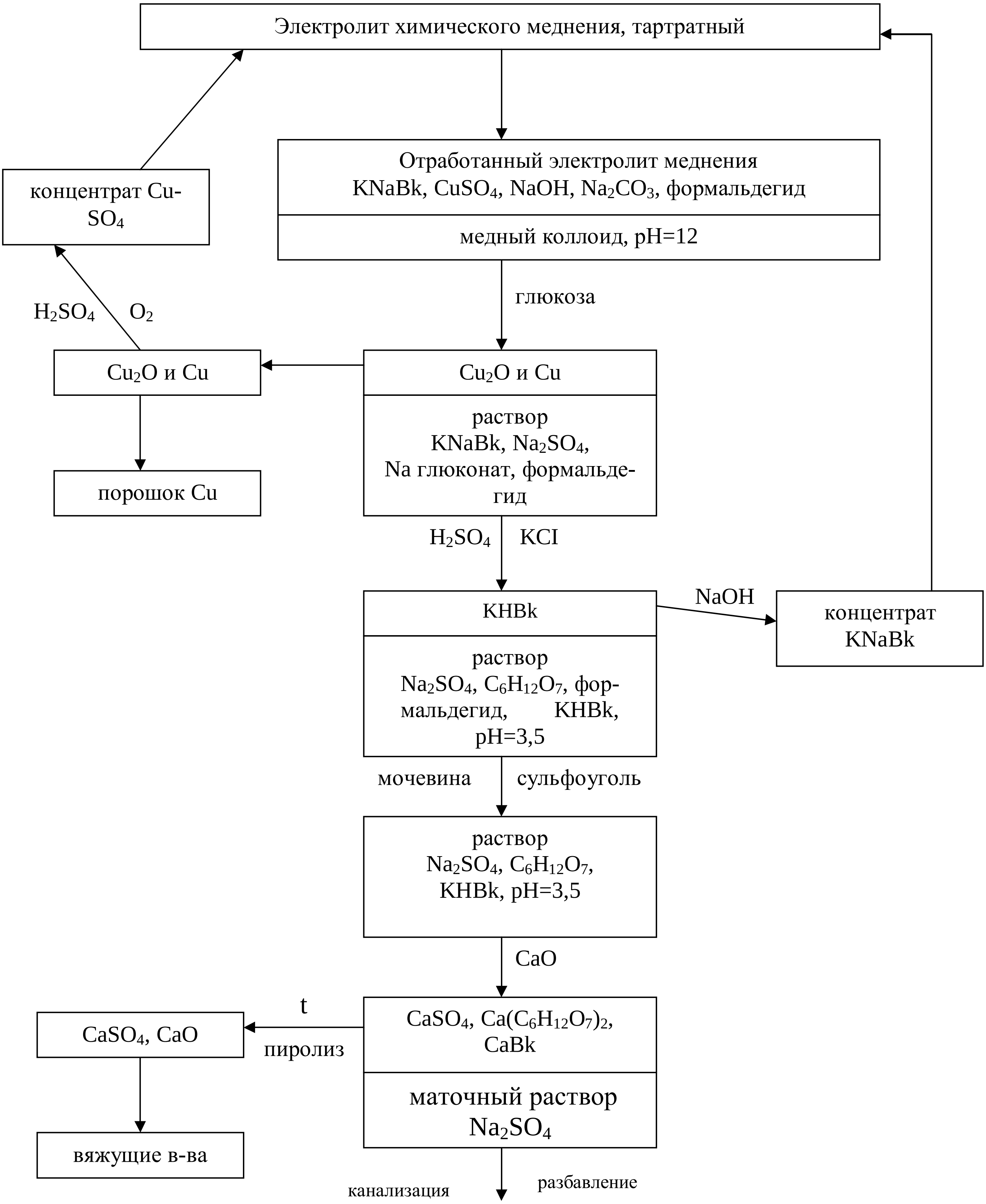


Рис. 2 - Регенерационная утилизация тартратного электролита

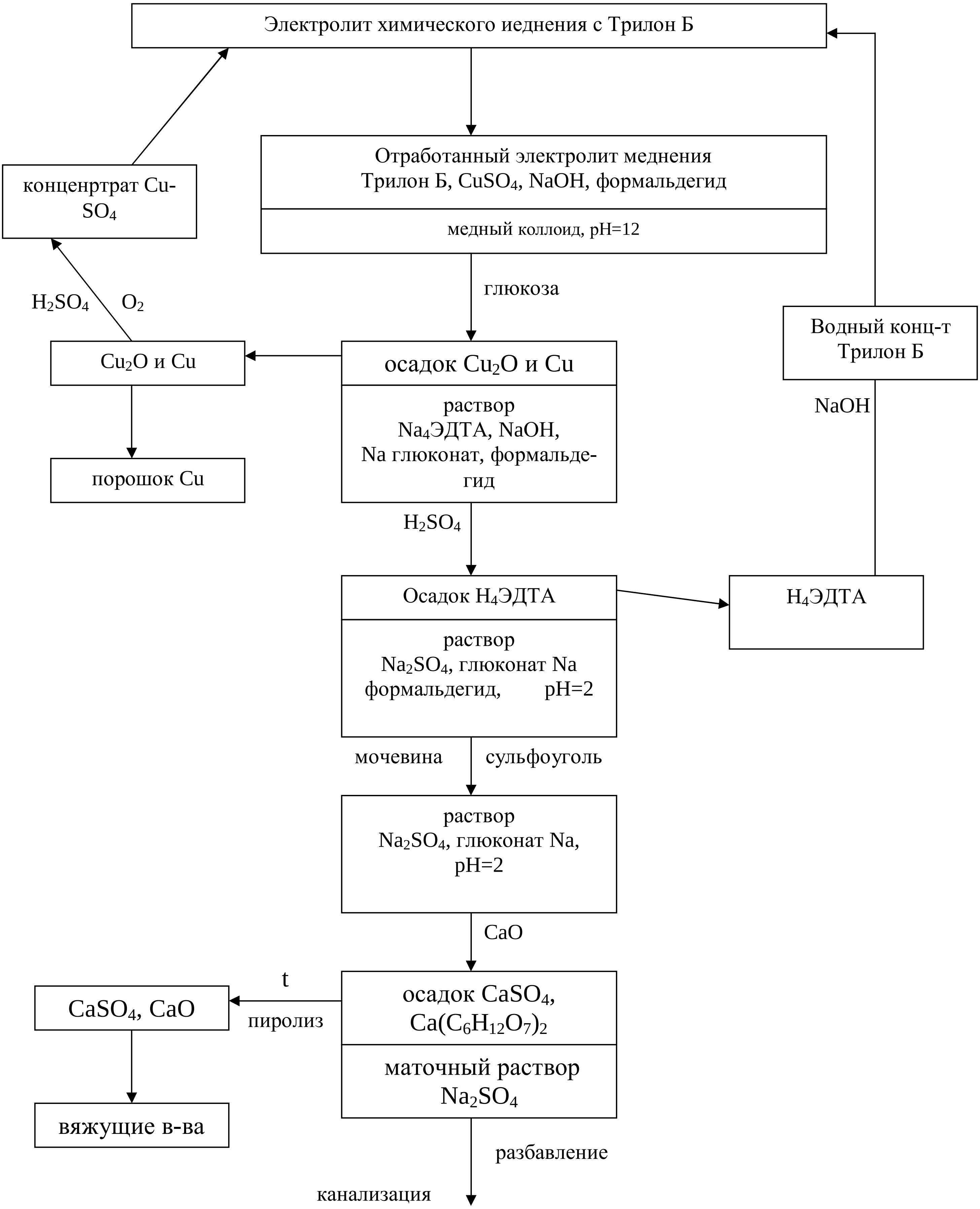


Рис. 3 - Регенерационная утилизация электролита химического меднения с Трилоном Б

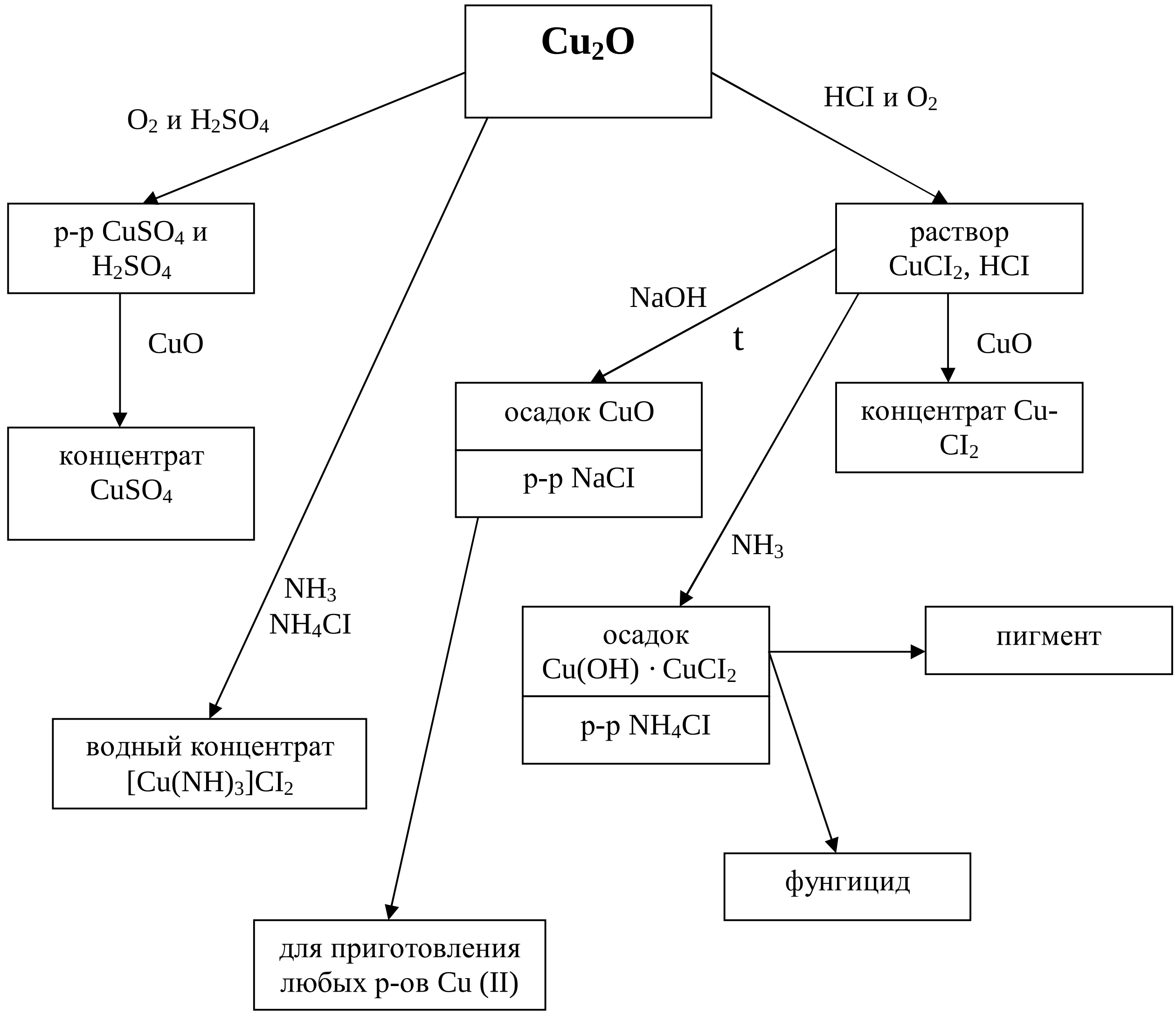


Рис. 4 - Схема утилизации Cu_2O

УДК 631.423: 631.438:546.36:58.051

ВЛИЯНИЕ ОСНОВНЫХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ И АГРОХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЧВ НА НАКОПЛЕНИЕ ^{137}Cs ТРАВЯНИСТОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТЬЮ

Н.А. Сковородникова

Показано, что наиболее тесная корреляционная связь наблюдается между удельной активностью ^{137}Cs в надземной фитомассе и корнях травянистых растений и pH_{KCl}, степенью насыщенности почв основаниями и гидролитической кислотностью.
Ключевые слова: *агрохимические свойства почвы, ^{137}Cs, радионуклиды, травянистая растительность, коэффициент перехода.*

В условиях непрекращающейся хозяйственной деятельности на территориях, загрязненных радиоактивными продуктами Чернобыльского выброса, одной из основных задач научных исследований является поиск путей уменьшения поступления радионуклидов в продукцию растениеводства и кормопроизводства. Так как уже через год после радиоактивных выпадений основным путем поступления радионуклидов в растения становится корневой, то изучение влияния основных физико-химических и агрохимических свойств почв на накопление ^{137}Cs растительностью в отдаленный период после катастрофы является весьма актуальной задачей.

Целью исследования явилось изучение влияния основных физико-химических и агрохимических свойств разных типов почв на накопление растениями ^{137}Cs в отдаленный период после катастрофы на ЧАЭС.

Непосредственным объектом исследования служила растительность открытой катены «Старый Вышков» (с. Старый Вышков Новозыбковского района Брянской области). В 1992 году вдоль трансекта, имеющего южное направление, сотрудниками кафедры почвоведения, агрохимии и сельхозрадиологии Брянской ГСХА Е.В. Просянниковым и В.Б. Осиповым, были заложены мониторинговые ключевые почвенные участки (КПУ). На каждом КПУ были выделены опорные почвенные площадки (ОПП), имеющие площадь, равную 25-30 м^2. ОПП различаются по степени агрогенного воздействия на почву: 1) естественная экосистема; 2) агроэкосистема, и расположены в непосредственной близости на одном и том же элементе рельефа [Осипов, 1995; Просянников, 1995]. Естественные экосистемы периодически используются в качестве сенокосно-пастбищных угодий.

Отбор растительных образцов проводили в конце вегетации (II декада августа) в 3-х кратной повторности. Для определения биомассы травостоя применяли метод рамки. Растения срезали на высоте 0,5-1 см от поверхности почвы с площади 0,25 м^2. Растительную массу ополаскивали под проточной водой, для того чтобы исключить влияние на результат определения удельной активности травостоя некорневого загрязнения, затем высушивали и взвешивали. Для определения накопления ^{137}Cs корневыми системами были отобраны монолиты почвы 25х25 см на глубину 20 см. Корни промывали на сите с размером ячейки 1 мм, высушивали и взвешивали.

Отбор образцов почвы проводили в 3-5-х кратной повторности до глубины 20 см. Почву высушивали, измельчали и пропускали через сито с диаметром 1 мм. Определение удельной активности почвы, сухой массы растительности и корней проводили сцинтилляционным методом на приборе РУБ-01П6 с блоком детектирования БДКГ-03П.

Физико-химические и агрохимические свойства почв определяли по общепринятым методикам: pH солевой вытяжки потенциометрически, гидролитическую кислотность по Каппену, гумус по методу Никитина с колориметрическим окончанием по Орлову-Гриндель, кальций и магний трилонометрически, обменный калий и подвижный фосфор по методу А.Г. Кирсанова, емкость катионного обмена и степень насыщенности основаниями расчетным путем [Практикум…, 2001].

Для оценки поступления радионуклидов из почвы в растения используют различные показатели. Однако часто предпочтение отдается определению коэффициента пропорциональности (коэффициента перехода), который равен отношению концентрации радионуклидов в растениях (Бк/кг воздушно-сухой массы) к плотности загрязнения почвы (Бк/м^2). Это связано с неравномерным распределением радионуклида по профилю почв естественных экосистем, что влияет на поступление ^{137}Cs в надземную массу растений.

В таблице 1 представлены результаты исследований параметров накопления ^{137}Cs в надземной фитомассе и корнях травянистых растений.

Таблица 1 – Параметры накопления ^{137}Cs травостоем и корнями травянистых растений на разных типах почв

Показатели	Плотность загрязнения почвы, кБк/м^2	Активность ^{137}Cs, кБк/кг		Кп·10^{-3}, кБк/кг/кБк/м^2	
		травостой	корни	травостой	корни
1	2	3	4	5	6
Естественные экосистемы*					
Р1, вершина холма, дерново-подзолистая почва, разнотравье с преобладанием мятликовых трав	1578	0,17	3,29	0,11	2,08
Р7, верхняя часть склона, дерново-подзолистая почва, мятликовые травы	1365	1,36	6,05	1,00	4,40
Р8, подножье склона, болотно-дерново-глубокоподзолистая почва, разнотравье с преобладанием мятликовых трав	1056	0,33	7,01	0,31	6,64
Р11, древняя ложбина стока, болотная низинная почва, разнотравье с преобладанием осок	2034	0,43	4,89	0,21	2,40
Агроэкосистемы					
Р2, вершина холма, дерново-подзолистая почва, ячмень	1539	0,26	0,73	0,17	0,47
Р6, верхняя часть склона, дерново-подзолистая почва, ячмень	610	0,19	2,12	0,31	3,48
Р9, подножье склона, болотная низинная перегнойно-глеевая почва, мятликовые травы	510	0,19	0,23	0,37	0,45
Р10, древняя ложбина стока, болотная низинная перегнойно-мелкоторфяно-глеевая почва, мятликовые травы	384	0,19	1,31	0,50	3,41

В таблице 2 представлены основные физико-химические и агрохимические свойства почв катены «Старый Вышков».

Таблица 2 – Основные физико-химические и агрохимические свойства почв катены «Старый Вышков»

№ ОПП	pH_{KCl}	Нг, мг-экв/100 г	Гумус, %	Обменные катионы, мг-экв/100 г		ЕКО, мг-экв/100г	V, %	K_2O	P_2O_5
				Ca^{2+}	Mg^{2+}			мг/100 г почвы	
Р1	7,32	0,62	1,75	6,93	3,01	10,56	94,18	9,13	24,66
Р7	3,74	5,53	1,69	3,80	1,20	10,53	49,61	2,62	10,44
Р8	5,12	6,27	7,00	7,92	3,44	17,63	65,07	29,82	48,34
Р11	6,30	2,63	25,48*	27,68	5,08	35,39	93,00	7,61	9,89
Р2	6,67	0,85	1,85	13,00	26,50	40,35	97,33	11,00	73,50
Р6	6,56	1,13	2,22	12,00	15,00	28,13	95,43	8,13	34,25
Р9	7,28	0,69	3,47	14,50	37,50	52,69	98,42	4,38	55,75
Р10	7,30	0,65	36,11	40,00	11,00	51,65	98,73	6,38	12,25

* - потери при прокаливании

На основании результатов исследований установлены корреляционные зависимости величины удельной активности травостоя и корней и коэффициентов перехода радионуклидов в растения от основных физико-химических и агрохимических свойств почв.

В таблице представлены коэффициенты корреляции (r) между удельной активностью ^{137}Cs кБк/кг в травостое и корнях и физико-химическими и агрохимическими свойствами почв катены «Старый Вышков».

Таблица 3 – Коэффициенты корреляции (r) между удельной активностью ^{137}Cs в травостое и корнях и физико-химическими и агрохимическими свойствами почв катены «Старый Вышков»

Физико-химические и агрохимические показатели	Удельная активность ^{137}Cs, кБк/кг	
	травостой	корни
pH_{KCl}	-0,88	-0,79
Нг, мг-экв/100 г	0,66	0,91
Гумус, %	-0,18	-0,05
Обменный Ca^{2+}, мг-экв/100 г	-0,36	-0,35
Обменный Mg^{2+}, мг-экв/100 г	-0,43	-0,82
ЕКО, мг-экв/100г	-0,49	-0,75
V, %	-0,84	-0,82
Обменный K_2O, мг/100 г почвы	-0,26	0,49
Подвижный P_2O_5, мг-экв/100 г	-0,42	-0,42

Как видно из таблицы 3, поступление ^{137}Cs в травостой находится в прямой зависимости от гидролитической кислотности (r = 0,66) и в обратной – от pH_{KCl}, степени насыщенности почв основаниями, ЕКО, содержания обменных Mg^{2+} и Ca^{2+}, подвижного P_2O_5, и в меньшей степени от содержания гумуса и обменного K_2O.

Для накопления ^{137}Cs в корневых системах в целом сохраняются аналогичные зависимости. Однако отмечается более сильная обратная связь с ЕКО и обменным Mg^{2+}, содержание которого в изучаемых почвах повышено вследствие внесения высоких доз доломитовой муки. Также, в отличие от травостоя, отмечается средняя положительная связь накопления радионуклида в корнях с содержанием в почве обменного калия.

В связи с тем, что между Нг, pH_{KCl}, V и удельной активностью травостоя ($A_{тр}$) обнаружена сильная достоверная корреляционная связь, были составлены уравнения линейной и множественной регрессии для прогноза содержания радионуклидов в травостое:

$A_{тр} = -0{,}267pH_{KCl} + 2{,}034$, $R^2 = 0{,}741$;

$A_{тр} = 0{,}091Нг + 0{,}118$, $R^2 = 0{,}559$;

$A_{тр} = -0{,}016V + 1{,}744$, $R^2 = 0{,}661$.

$A_{тр} = 4{,}445 – 0{,}540pH_{KCl} – 0{,}136\ Нг – 0{,}004\ V$, $R^2 = 0{,}824$.

Для прогноза содержания радионуклидов в корневых системах ($A_{кор}$) составлены следующие уравнения регрессии:

$A_{кор} = -1{,}587pH_{KCl} + 13{,}180$, $R^2 = 0{,}622$;

$A_{кор} = 0{,}989Нг + 0{,}933$, $R^2 = 0{,}821$;

$A_{кор} = -0{,}160Mg^{2+} + 5{,}253$, $R^2 = 0{,}667$;

$A_{кор} = -0{,}112V + 12{,}892$, $R^2 = 0{,}670$;

$A_{кор} = -0{,}112ЕКО + 6{,}662$, $R^2 = 0{,}564$;

$A_{кор} = -0{,}011\ pH_{KCl} + 1{,}095\ Нг – 0{,}067\ Mg^{2+} –0{,}032\ ЕКО + 0{,}062V – 2{,}761$, $R^2 = 0{,}981$.

Установлено, что для прогноза удельной активности травостоя целесообразно использовать несколько почвенных характеристик - pH_{KCl}, гидролитическую кислотность и степень насыщенности основаниями, а для прогноза удельной активности корней также необходимо дополнительно учитывать ЕКО и содержание обменного магния.

В таблице 4 представлены коэффициенты корреляции (r) между КП·10^{-3}, кБк/кг/кБк/м^2, и физико-химическими и агрохимическими свойствами почв катены «Старый Вышков».

Таблица 4 – Коэффициенты корреляции (r) между КП·10^{-3} и физико-химическими и агрохимическими свойствами почв катены «Старый Вышков»

Физико-химические и Агрохимические показатели	КП·10^{-3}, кБк/кг/кБк/м^2	
	травостой	корни
pH_{KCl}	-0,71	-0,64
Нг, мг-экв/100 г	0,51	0,80
Гумус, %	0,01	0,10
Обменный Ca^{2+} мг-экв/100 г	-0,11	-0,14
Обменный Mg^{2+} мг-экв/100 г	-0,24	-0,72
ЕКО, мг-экв/100г	-0,19	-0,54
V, %	-0,71	-0,71
Обменный K_2O мг/100 г почвы	-0,35	0,60
Подвижный P_2O_5 мг-экв/100 г	-0,43	-0,36

Как видно из таблицы 4, для коэффициентов перехода ^{137}Cs в травостой и корни растений катены «Старый Вышков» сохраняются те же зависимости, что и для удельной активности растений, однако корреляционная связь между коэффициентом перехода и гидролитической кислотностью, степенью насыщенности основаниями менее сильная. Тесные корреляционные связи между КП ^{137}Cs в травостой и pH_{KCl}, гидролитической кислотностью и степенью насыщенности почв основаниями были получены и другими исследователями [Подоляк, 2002].

Так как между pH_{KCl}, степенью насыщенности основаниями и коэффициентом перехода ^{137}Cs в травостой (КП$_{тр}$·10^{-3}) обнаружена сильная достоверная корреляционная связь, были получены уравнения регрессии, позволяющие рассчитать величину коэффициентов перехода:

$КП_{тр}\cdot10^{-3} = 1,369 – 0,158pH_{KCl}, R^2 = 0,505;$

$КП_{тр}\cdot10^{-3} = 1,309 – 0,0108V, R^2 = 0,510;$

$КП_{тр}\cdot10^{-3} =3,184 – 0,136\ pH_{KCl} – 0,145\ Нг – 0,019\ V, R^2 = 0,710.$

Уравнения регрессии для расчета коэффициента перехода ^{137}Cs в корни (КП$_{кор}$·10^{-3}) имеют следующий вид:

$КП_{кор}\cdot10^{-3} = 0,708Нг + 1,290, R^2 = 0,641;$

$КП_{кр}\cdot10^{-3} = -0,113\ Mg^{2+} + 4,370, R^2 = 0,511;$

$КП_{кр}\cdot10^{-3} = -0,079V + 9,702, R^2 = 0,500;$

$КП_{кр}\cdot10^{-3} = 0,797\ Нг – 0,064\ Mg^{2+} + 0,039\ V – 1,491, R^2 =0,759.$

Для прогноза коэффициентов перехода ^{137}Cs в надземную фитомассу и корни травянистых растений также целесообразно использовать несколько почвенных характеристик – pH_{KCl}, гидролитическую кислотность и степень насыщенности основаниями.

Таким образом, поступление ^{137}Cs в травостой находится в прямой зависимости от гидролитической кислотности (r = 0,66) и в обратной – от pH_{KCl} (r = -0,88), степени насыщенности почв основаниями (r = -0,84). Для накопления ^{137}Cs в корневых системах в целом сохраняются аналогичные зависимости, однако отмечается более сильная обратная связь с ЕКО и обменным Mg^{2+} и средняя положительная связь с обменным K_2O. Для коэффициентов перехода ^{137}Cs в травостой и корни растений сохраняются аналогичные зависимости.

It is shown that the closest correlation connection is observed between specific activity of ^{137}Cs in surface phytomass and roots of grassy plants and pH_{KCl}, degree of a saturation of soils by the bases and hydrolytic acidity.
The key words: *agrochemical properties of soil, ^{137}Cs, radionuclide, grassy plants, ccoefficient of transition.*

Список литературы

1.Осипов, В.Б. Физико-химические особенности поведения ^{137}Cs, ^{90}Sr и их стабильных изотопов в почвах экосистем Брянской области, подвергшихся загрязнению в результате аварии на Чернобыльской АЭС: Дис. … канд. биол. наук: 03.00.01 / В.Б. Осипов; ВНИИСХРАЭ. Обнинск, 1995. 149 с.

2.Подоляк, А.Г. Влияние агрохимических и агротехнических приемов улучшения основных типов лугов Белорусского Полесья на поступление в травостой ^{137}Cs и ^{90}Sr: Автореф. дис. … канд. с.-х. наук: 06.01.04 / А.Г. Подоляк; Ин-т почвоведения и агрохимии. Минск, 2002. 24 с.

3.Практикум по агрохимии: Учеб. пособие / под ред. В.Г. Минеева. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: МГУ, 2001.689 с.

4.Просянников, Е.В. Взаимовлияние почв и радиоактивности в экосистемах полесья и ополья юго-запада России: Дис. … д-ра. с.-х. наук: 03.00.27 / Е.В. Просянников; Почв. ин-т им. В.В. Докучаева. Москва, 1995. 464 с.

Об авторе:

Н. А. Сковородникова – канд. доц. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, eco_egf@mail.ru.

УДК 581.5

СООБЩЕСТВА С УЧАСТИЕМ *VALERIANA ROSSICA* P. SMIRN. В ДОЛИНЕ Р. ДЕСНЫ В БРЯНСКОЙ ОБЛАСТИ

Ю.А.Семенищенков

В статье приведена характеристика кальцефитных сообществ с участием регионально редкого вида *Valeriana rossica* в Брянской области.

Ключевые слова: *Брянская область, кальцефитная растительность, валериана русская.*

Валериана русская – *Valeriana rossica* P. Smirn. (*Valeriana dubia* Bunge subsp. *rossica* (P. Smirnov) Worosch. = *Valeriana pseudodubia* Sumn. = *Valeriana sumnewiczii* Worosch.) – восточноевропейско-сибирский вид, спорадически распространенный на степных, каменистых, открытых склонах, лугах, по краю лесов, в разреженных лесах, березовых колках, кустарниковых зарослях, по залежам, поймам рек в европейской части России, в восточной Украине, Северном Казахстане и Сибири [Флора СССР, 1958; Флора Сибири, 1996]. На протяжении своего обширного ареала этот вид встречается рассеянно и входит в состав степей, остепненных лугов различного состава, опушечных, петрофитных, реже рудеральных сообществ, причем нередко считается редким, а в ряде регионов рекомедован к охране или внесен в региональные Красные книги [Благовещенский и др., 1984; Ганнибал, 2001; Майоров, 2004; Масленников, 2004; Полуянов, 2005; Архипова и др., 2006; Постановление..., 2006; Савинов, 2006; Гусев, 2008; Еленевский и др., 2008; Кузьмин, 2009]. В Брянской области также отмечается как редкий [Булохов, Величкин, 1998; Семенищенков, 2009]. Обыкновенно отмечается в Орловской [Еленевский, Радыгина, 2005], Воронежской [Агафонов, 2006] областях Это ценное лекарственное и медоносное растение, как и другие близкие виды рода *Valeriana*.

В ходе флористико-геоботанического обследования долины р. Десны в Брянской области были описаны интересные сообщества с участием *Valeriana rossica*. Они распространены на крутых правобережных коренных склонах долины преимущественно южной, юго-восточной и восточной экспозиции у населенных пунктов Усох, Радутино, Дольск, Острая лука, Гнилево, Арельск, Н. и В. Новоселки (Трубчевский р-н). Здесь валериана встречается рассеянно, изредка в достаточно большом количестве и в первой половине июня создает бело-розовый аспект, теряющийся на фоне карбонатных обнажений.

С позиций флористической классификации такие сообщества отнесены к ассоциации ***Thymo ovati–Poetum compressae*** Semenishchenkov 2009 (табл.). Ее диагностические виды: *Poa compressa, Thymus ovatus, Euphrasia stricta, Linaria vulgaris, Pastinaca sylvestris, Valeriana rossica*. Это кальцефитные сообщества, распространенные на суховатых (4.0) бедных минеральным азотом (3.8) деградированных крутых (до 45 ^{o}) и пологих меловых и мергелистых коренных склонах долины р. Десны. Изредка сообщества встречаются по крутым смываемым карбонатным склонам балок в пределах ландшафтов ополий.

Состав и структура. Основу несомкнутого травостоя формируют *Poa compressa, Thymus ovatus, Daucus carota, Pastinaca sylvestris, Trifolium pratense*. Его высота 15-40 см. Изредка обилен ксерофильный мох *Abietinella abietina*. Распределение растений характеризуется высокой мозаичностью, вызванной различием в увлажнении и интенсивности смыва на склонах. Проективное покрытие варьирует от 10 % на крутых смытых склонах, до 50 % – на более пологих.

В ценофлоре этой ассоциации в Брянской области отмечен ряд редких для региональной флоры видов растений, характерных в основном для хорошо прогреваемых склонов балок и коренных берегов рек, а также опушек: *Anemone sylvestris, Carex humilis* (очень редко, единичными экземплярами), *Prunella grandiflora, Prunus spinosa* (очень редко, единичными экземплярами) [Семенищенков, 2009].

Описанные сообщества имеют важное противоэрозионное значение, так как формируются на крутых, подверженных интенсивному смыву склонах коренных склонов.

Синтаксономическое положение описанной ассоциации дискуссионно. По своей экологии она в большой степени тяготеет к классу ***Festuco–Brometea***, однако по составу диагностических видов ассоциация не может быть отнесена ни к одному из известных союзов. В Украине петрофитные сообщества на карбонатных обнажениях объединяют в класс ***Hellianthemo–Thymetea*** Romaschenko, Didukh et V. Sl. 1996, диагностические виды которого в наших сообществах не встречаются [Соломаха, 2008]. Сильно отличается ассоциация и по составу ценофлоры от сообществ указанного класса из Украины и Северного Приазовья [Дідух, 1989; Середа, 2008].

В ценофлоре ассоциации – комбинация мезофитных видов класса ***Molinio–Arrhenatheretea***, ксерофитных и ксеромезофитных видов, характерных для класса ***Festuco – Brometea***, опушечных видов класса ***Trifolio–Geranietea*** и сорно-рудеральных класса ***Artemisietea*** (табл.). Ранее ассоциация рассматривалась в составе класса ***Molinio–Arrhenatheretea*** в связи с широким участием в ее ценофлоре видов данного класса [Семенищенков, 2006; Семенищенков, 2009]. По составу диагностических видов ассоциация предварительно отнесена к союзу остепненных лугов Южного Нечерноземья России ***Scabioso ochroleucae–Poion angustifoliae*** порядка ***Galietalia veri***. Следует отметить, что эти сообщества в полной мере экологически не отвечают концепции указанного лугового союза. Сообщества с присутствием *Valeriana rossica* представляют собой наиболее «крайний» кальцефитный вариант ассоциации, объединяющий сообщества в наиболее «экстремальных» условиях крутых карбонатных склонов с большими площадями обнажений. Отнесение ассоциации к сорно-рудеральному классу ***Artemisietea***, на наш взгляд, неправомерно. Антропогенное воздействие на крутых склонах практически не проявляется: вытаптывание, палы травы, прогон скота, сенокошение или стравливание отсутствуют. В дальнейшем подобные сообщества, возможно, должны быть выделены в самостоятельный союз.

В сообществах указанной ассоциации с очень похожей структурой и флористическим составом в Брянском, Выгоничском, Дубровском, Жирятинском р-нах валериана не встречена.

В Центральной Европе, где синтаксономия подобных сообществ лучше разработана, *Valeriana rossica* не отмечается. С позиций флористической классификации в нашей стране (Алтайский край) она отмечена в залесскоковыльных богаторазнотравно-дерновиннозлаковых степях союза ***Helictotricho–Stipion zalesskii*** Toman 1969 порядка ***Helictotricho–Stipetalia*** Toman 1969 класса ***Festuco–Brometea*** Br.-Bl. et Tx. 1943 [Науменко, 1994].

Таблица – Асс. ***Thymo ovati–Poetum compressae*** Semenishchenkov 2006

Номер описания: табличный	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
авторский	**1100**	**1096**	**1099**	**1097**	**1095**	**1501**
Экспозиция склона	**юв**	**юв**	**юв**	**юв**	**юв**	**в**
Общее покрытие, %	**15**	**15**	**15**	**10**	**20**	**50**
Количество видов	**21**	**18**	**20**	**19**	**19**	**36**
Д. в. асс. ***Thymo ovati–Poetum compressae***						
Poa compressa	+	+	+	r	1	1
Thymus ovatus	+	+	+	r	+	+
Linaria vulgaris	+	+	+	+	.	+
Euphrasia stricta	+	+	+	.	.	1
Pastinaca sylvestris	.	+	.	+	+	+
Valeriana rossica	+	+	+	+	+	+
Д. в. союза ***Scabioso ochroleucae–Poion angustifoliae*** и порядка ***Galietalia veri***						
Daucus carota	+	+	r	+	+	+
Knautia arvensis	+	.	.	+	+	.
Artemisia campestris	+	+	.	r	.	.
Scabiosa ochroleuca	+	+	.	r	.	.
Pimpinella saxifraga	.	.	+	r	+	+

Номер описания: табличный	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Д. в. класса ***Molinio–Arrhenatheretea***						
Leucanthemum vulgare	+	+	+	+	+	+
Achillea millefolium	+	.	+	+	.	.
Centaurea jacea	.	r	+	r	+	+
Galium mollugo	+	+	+	.	.	+
Leontodon autumnalis	+	.	+	.	.	.
Vicia cracca	.	+	.	.	r	r
Д. в. класса ***Trifolio–Geranietea sanguinei***						
Cichorium intybus	.	.	+	r	.	+
Hypericum perforatum	+	+	+	+	.	r
Campanula rapunculoides	r	.	r	.	.	+
Verbascum lychnitis	+	.	.	+	.	.
*Anemone sylvestris**	.	.	.	.	1	.
Д. в. класса ***Artemisietea***						
Tussilago farfara	.	+	.	+	+	.
Artemisia vulgaris	.	.	.	.	.	+
Sonchus arvensis	+	+	.	.	r	+
Прочие виды						
Pilosella officinarum	+	.	+	.	+	+
Solidago virgaurea	+	.	r	.	.	+
Galeopsis ladanum	.	.	+	.	+	+

Единично встречены: *Abietinella abietina (6,2), Ajuga genevensis (6,r), Amoria repens (6,+), Artemisia absinthium (4,+), Carex contiqua (6,r), Chaenorhinum minus (2,r), Cerastium holosteoides (3,+), Dactylis glomerata (6,r), Elytrigia repens (6,+), Fragaria viridis (2,+), Galium boreale (6,+), Geranium pratense (6,r), Euphorbia virgata (1,+), Helichrysum arenarium (1,r), Lathyrus pratensis (6,+), Lotus corniculatus (6,r), Medicago lupulina (6,+), Polygala comosa (3,r), Seseli annua (5,r), Pteridium aquilinum (6,1), Ranunculus acris (6,+), Rubus caesius (4,r), Rumex acetosa (5,+), Salvia pratensis (6,+), Senecio jacobaea (5,r), Solanum dulcamara (5,r), Taraxacum officinale (6,r), Trifolium pratense (6,+).*

Пункты описаний: оп. 1095, 1096, 1097, 1099, 1100 – коренные склоны долины р. Десны в 2 км северо-восточнее д. Усох (Трубчевский р-н), 24.07.2005; оп. 1501 – склоны балок у с. Н. Новоселки (Трубчевский р-н), 20.08.2005. Автор Ю. А. Семенищенков.

Изучение распространения *Valeriana rossica* и сообществ с ее участием в Брянской области будет продолжено. Материалы исследования будут использованы при создании Красной и Зеленой книг Брянской области.

In the paper the characteristic of calcephytic communities with regional rare species *Valeriana rossica* in Bryansk region.
The key words: *Bryansk region, calcephytic vegetation, Valeriana rossica.*

Список литературы

1.Архипова, Е. А. Виды грибов, лишайников и растений, рекомендуемые для внесения во второе издание Красной книги Саратовской области / Е.А. Архипова, М.А. Березуцкий, В.А. Болдырев, М.В. Буланая, Ю.И. Буланый, О.В. Костецкий, В.В. Маевский, А.В. Панин, Т.Б. Протоклитова, Т.Б. Решетникова, Л.А. Серова, М.В. Степанов, В.И. Стуков, Л.П. Худякова, Л.А. Черепанова, И.В. Шилова // Поволжский экологический журнал. 2006 Вып. спец. С. 18-28.

2.Благовещенский, В. В. Определитель растений Среднего Поволжья / Благовещенский В. В., Пчелкин Ю. А, Раков Н. С., Старикова В. В., Шустов В. С. –Л.: Наука, 1984. 392 с.

3.Ганнибал, Б. К. История «заказной степи» Хреновского конезавода / Ганнибал Б. К. // Степной бюллетень. 2001. № 9.

4.Гусев, А. В. Охраняемые виды во флоре Белгородской области / Гусев А. В. // Фундаментальные и прикладные проблемы ботаники в начале XXI века: Мат. всероссийской конференции (Петрозаводск, 22–27 сентября 2008 г.). Часть 3. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2008. С. 341-344.

5.Дідух, Я. П. 1989. Флористична классифікація угруповань «Гиссоповои флори» / Дідух Я. П. // Укр. ботан. журн. Т. 46 № 6. С. 16-21.

6.Еленевский, А. Г. Конспект флоры Саратовской области / Еленевский А. Г., Буланый Ю. И., Радыгина В. Ю. Саратов, 2008. – 232 с.

7.Кузьмин, И. В. Охраняемые растения в естественных и урбанизированных ландшафтах гемибореальных лесов Тюменской области / Кузьмин И. В. // Самарская Лука. 2009. Т. 18. № 2. С. 90-95.

8.Майоров, С. Р. Список сосудистых растений Козельского района Калужской области Майоров С. Р. // http://herba.msu.ru/journals/Herba/9.

9.Масленников, А. В. Проблемы и перспективы охраны кальцефильной флоры и кальциевых ландшафтов центральной части Приволжской возвышенности // Природа Симбирского Поволжья / Масленников А. В.. Вып. 5. Ульяновск, 2004.

10.Науменко, Н. И. Редкие и исчезающие растения лесостепного Зауралья / Науменко Н. И. Курган: Парус, 1994. 64 с.

11.Полуянов А.В. Флора Курской области. Курск: Изд-во КГУ, 2005.

12.Постановление Администрации Саратовской области от 22 апреля 1996 г. № 232 об утверждении перечня видов растений и животных для занесения в Красную книгу Саратовской области и такс для исчисления размера ущерба (по состоянию на 14 августа 2006 года).

13.Савинов И.А. Ботанические экскурсии по Москве и Московской области. М.: Социально-политическая мысль, 2006. 124 с.

14.Семенищенков, Ю.А. Остепненные луга долины реки Десны / Семенищенков Ю.А. // Мат. Междунар. науч.-практ. конф. «Молодые исследователи – ботанической науке 2006», Гомель, 21-22 сентября 2006 г. / Под ред. Н. М. Дайнеко. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2006. С. 26-30.

15.Семенищенков, Ю. А. Фитоценотическое разнообразие Судость-Деснянского междуречья / Семенищенков Ю. А. Брянск: РИО БГО, 2009. 400 с.

16.Середа, М. М. Новая ассоциация петрофитной растительности Северного Приазовья / Середа М. М. // Растительность России. № 12. 2008. С. 62-67.

17.Флора СССР. Т. XXIII, 1958. С. 628.

18.Флора Сибири. Т.12, 1996. С. 140.

Об авторе

Ю.А. Семенищенков - канд., стар. преп. Брянского государственного университета им. академика И.Г. Петровского, kafbot2002@mail.ru.

Правила оформления статей
в журнал «Вестник Брянского государственного университета»

В журнале «Вестник БГУ» публикуются статьи теоретического, методического и прикладного характера, содержащие оригинальный материал исследований автора (соавторов), ранее нигде не опубликованный.

Статьи представляются в редколлегии серий в печатном и электронном виде с использованием Microsoft Word для Windows. Поля страницы: левое - 2 см, правое – 2 см, верхнее – 2 см, нижнее – 2 см. Текст – шрифтом Times New Roman, 12 pt, межстрочный интервал - одинарный, красная строка (абзац) 1,25 см (формата А-4), выравнивание по ширине. Страницы не нумеруются.

Объем статей, как правило, не должен превышать 12 страниц, включая список литературы. Список литературы формировать в порядке цитирования или в алфавитном порядке (в начале источники на русском языке, затем на иностранных языках). Работы одного и того же автора цитируются в хронологическом порядке независимо от наличия соавторов. Ссылки на литературу по тексту статьи необходимо давать в квадратных скобках. Подписи к рисункам, таблицам – шрифт Times New Roman, 12 pt, межстрочный интервал – одинарный.

Перед названием статьи необходимо указать УДК (слева). Название статьи оформляется прописными буквами, жирным шрифтом (12 pt) с выравниванием по центру. Ниже через два интервала указать инициалы и фамилии авторов жирным шрифтом (12 pt) с выравниванием по центру. Ниже через два интервала указать адрес места работы, e-mail автора (соавторов) – обычный шрифт (10 pt) с выравниванием по центру.

Ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008 «Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». П.7.4.2. (текст см.: http://protect.gost.ru/document.aspx?control=7&id=173511)

Аннотация статьи должна не превышать 1200 знаков (с пробелами) и располагаться ниже на два пробела от последнего адреса места работы авторов – обычный шрифт (10 pt) с выравниванием по ширине. В конце аннотации необходимо указать ключевые слова (5 – 7).

В конце статьи на английском языке приводятся название, инициалы и фамилии авторов, адреса мест работы авторов, аннотация и ключевые слова с теми же правилами оформления, что и на русском языке.

Если статья выполнена при поддержке гранта или на основе доклада, прочитанного на конференции, то необходимо сделать соответствующую сноску в заголовке статьи.

К статьям, направляемым в редколлегии серий, должна быть приложена авторская справка: Фамилия, Имя, Отчество, научная степень, ученое звание, место работы, должность, точный почтовый адрес, контактный телефон, , e-mail.

К статьям, выполненными аспирантами или соискателями научной степени кандидата наук, необходимо приложить рекомендацию, подписанную научным руководителем. **Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.**

Редколлегии серий направляют полученные статьи на рецензирование.

Редколлегии серий оставляют за собой право вернуть статью на доработку.